

# 縦断データ分析の基礎 — SEMによるアプローチを中心に —

宇佐美慧

(東京大学大学院教育学研究科)

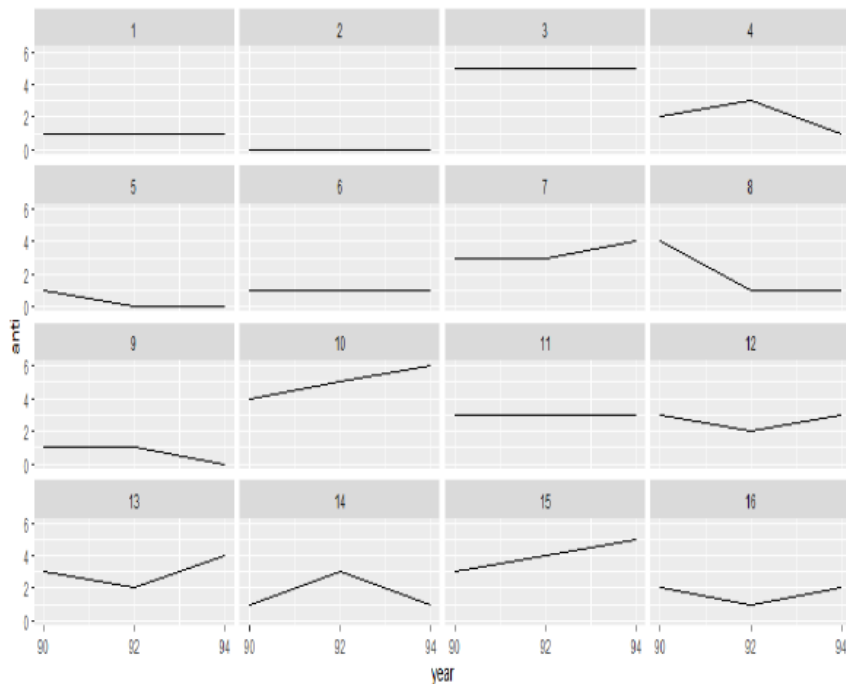
Email: [usami\\_s@p.u-tokyo.ac.jp](mailto:usami_s@p.u-tokyo.ac.jp)

HP: <http://usami-lab.com/>

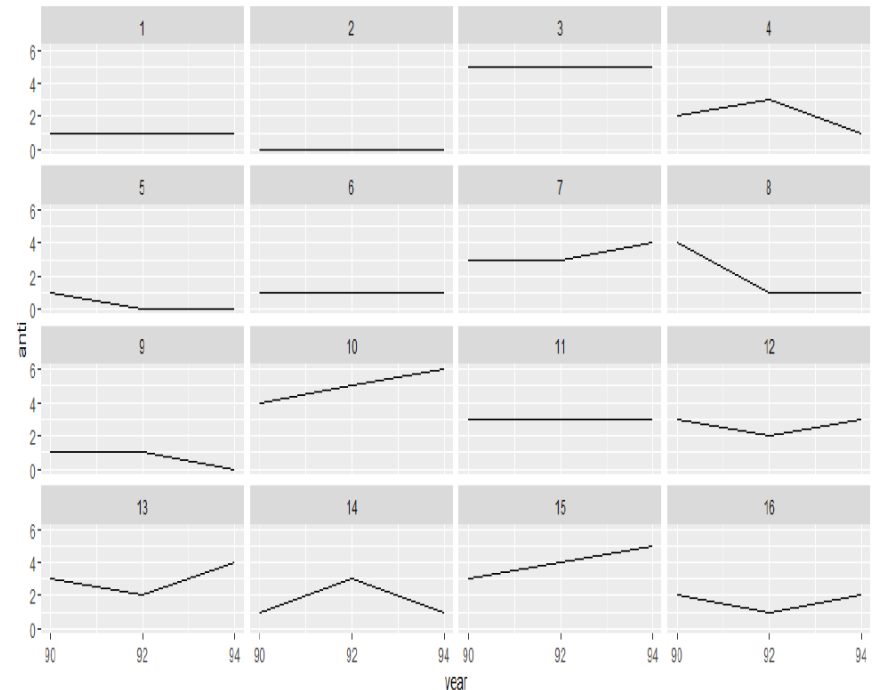
# 研究関心（潜在変数モデリング）

## ・縦断データ分析（構造方程式モデリング、階層線形モデル）

軌跡のモデリング、（個人内）関係の推論、分類、測定モデル、心理学・教育学・医学領域（コホート研究）への応用。



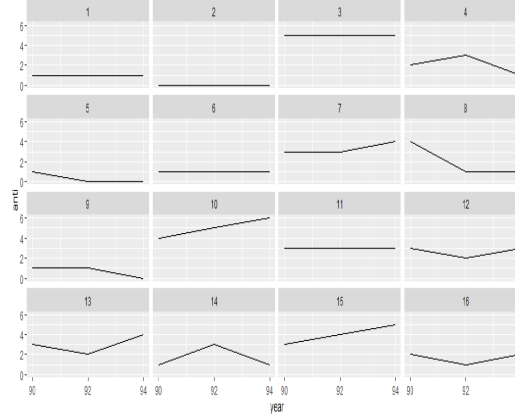
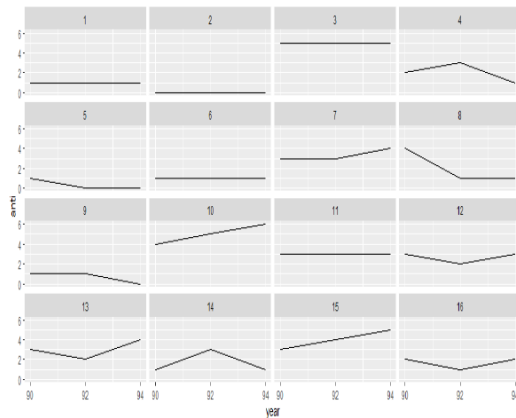
反社会的行動



自尊心

米国青年全国縦断調査(NLSY,1990,1992,1994)

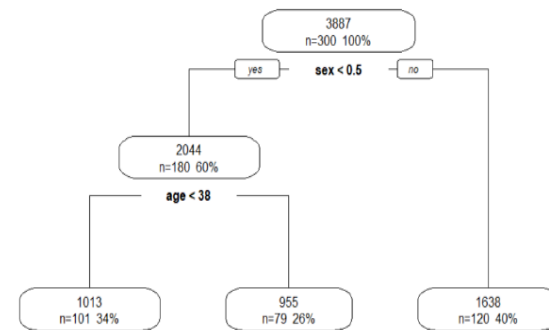
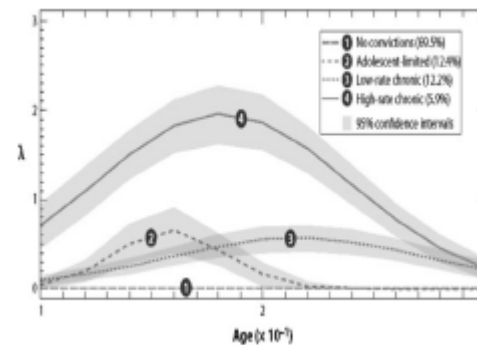
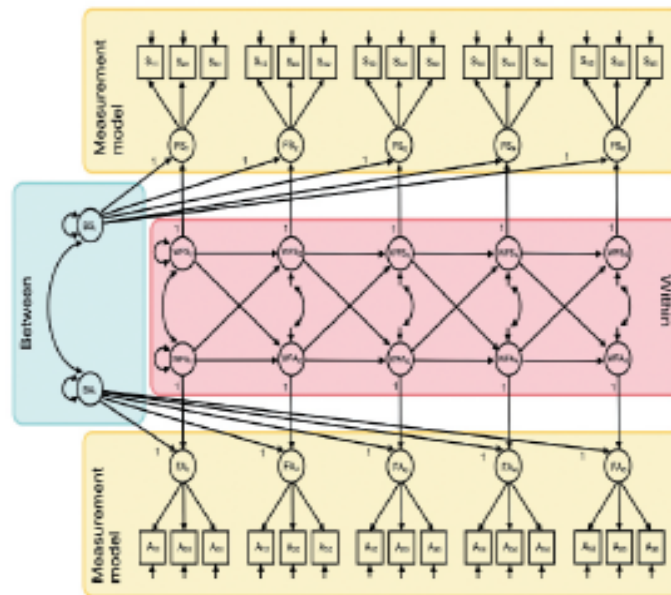
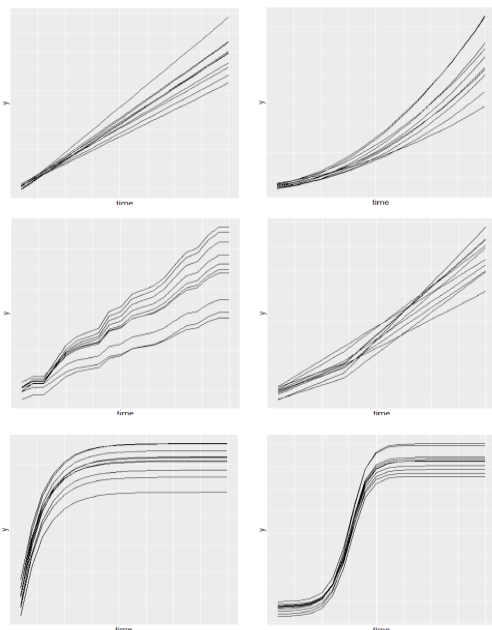
# 縦断データ



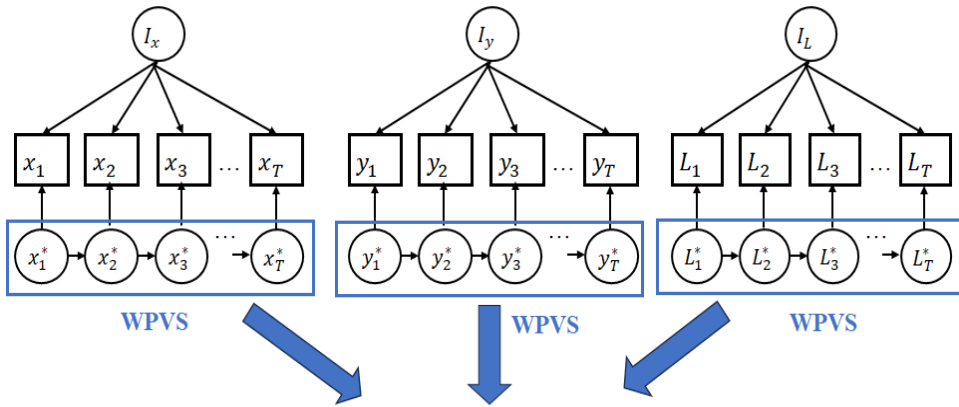
モデリング

関係性の推論

分類



# 因果推論

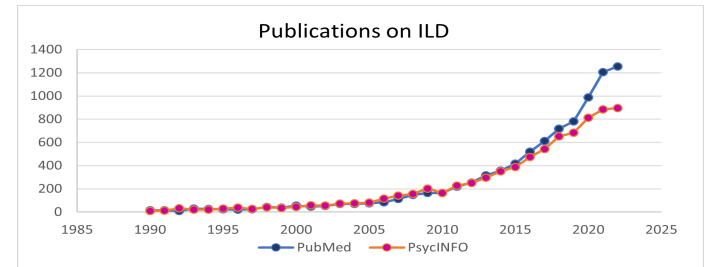


$$E(Y_{it}^* | \bar{Y}_{i(t-1)}^*, \bar{L}_{i(t-1)}^*, \bar{X}_{i(t-2)}^*) = \bar{x}_{i(t-2)}^*, X_{i(t-1)}^* = x_{i(t-1)}^{*r} + 1$$

$$- E(Y_{it}^* | \bar{Y}_{i(t-1)}^*, \bar{L}_{i(t-1)}^*, \bar{X}_{i(t-2)}^*) = \bar{x}_{i(t-2)}^*, X_{i(t-1)}^* = x_{i(t-1)}^{*r}$$

# 強縦断データ

(intensive longitudinal data: ILD)



# コホート研究 (Tokyo Teen Cohort: TTC)

東京ティーンコホートは、子どもの成長プロセスの調査・研究を通して日本の教育・医療・福祉の現場に貢献していきます。

【青春期の健康・発達調査】  
**TEEN COHORT**

はじまります！  
**第5回 継続調査**  
2022.09 START!

Home  
TEEN COHORTについて  
応援メッセージ  
見えてきたこと  
研究成果  
特集ページ  
メンバー紹介

Close up  
新着 応援メッセージ  
NEWS LETTER  
Report from England  
特集ページ



International Journal of Epidemiology, 2019, 1414-1414g  
doi: 10.1093/ije/dyz033  
Advance Access Publication Date: 16 March 2019  
Cohort Profile

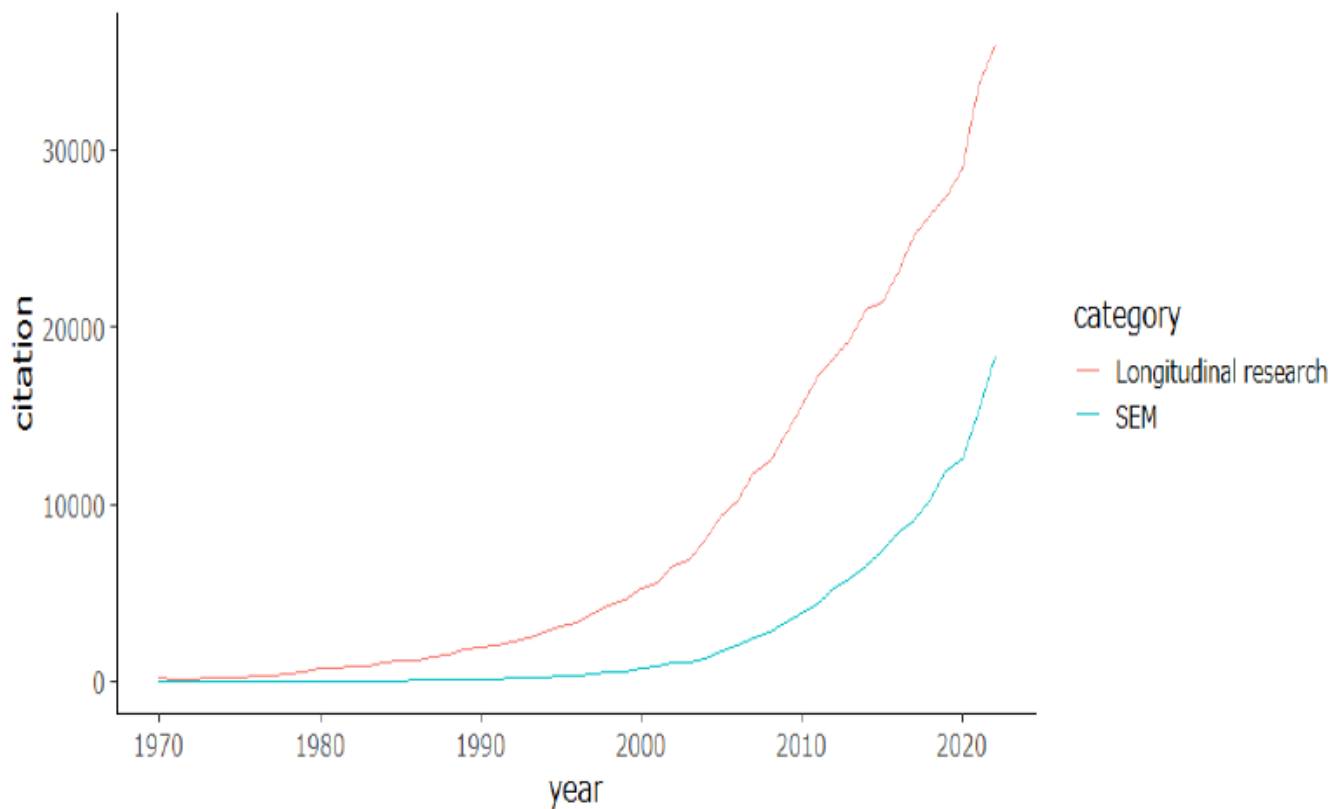
Cohort Profile

**Cohort Profile: The Tokyo Teen Cohort study (TTC)**

<http://ttcp.umin.jp/index.html>

Shuntaro Ando,<sup>1,2,\*</sup> Atsushi Nishida,<sup>2†</sup> Syudo Yamasaki,<sup>2</sup> Shinsuke Koike,<sup>3,4</sup> Yuko Morimoto,<sup>2</sup> Aya Hoshino,<sup>2</sup> Sho Kanata,<sup>5</sup> Shinya Fujikawa,<sup>1</sup> Kaori Endo,<sup>2</sup> Satoshi Usami,<sup>6</sup> Toshiaki A Furukawa,<sup>7,8</sup> Mariko Hiraiwa-Hasegawa<sup>9</sup> and Kiyoto Kasai,<sup>1,4</sup> TTC Scientific and Data Collection Team

# 縦断構造方程式モデリング (longitudinal structural equation modeling (SEM))



## ・ 教育測定

項目反応理論（モデル開発）、心理臨床検査の開発・標準化、学力調査の運用、記述式・論述式テストの評価。



# アウトライン

- ・ 縦断データの収集により、発達・変化の軌跡を記述したり、またその背後にあるダイナミクスを推測できるなど、幅広い研究仮説の検証が可能になる。
- ・ 一方で、実際の縦断研究のデザインや扱う研究仮説は極めて多様であり、また縦断データ分析は学際性の高い領域と言われ、研究領域によって異なる分析アプローチが慣習的にとられるケースも少なくない。

# アウトライン

- ・本講演では、縦断データの収集によってどのような研究仮説の検証が可能になるのかをまず整理し、その後、主に**構造方程式モデリング(SEM)**を用いた分析アプローチを概観する。
- ・特に、**潜在成長モデル**を中心とした軌跡のモデリングや、ダイナミクスの推測のための**交差遅延モデル群**およびモデル選択を巡る最新の議論について紹介し、その他、（時点数が多く、集中的に測定が行われる）**強縦断データ**や、**軌跡の分類**、**欠測データ処理**に関する話題についても紹介する。
- ・RやMplusで実装可能な分析コードも提供する。

- 導入
- 潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング
- 交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測
- 強縦断データと動学的SEM
- 軌跡の分類と潜在成長混合モデリング
- 欠測データの処理

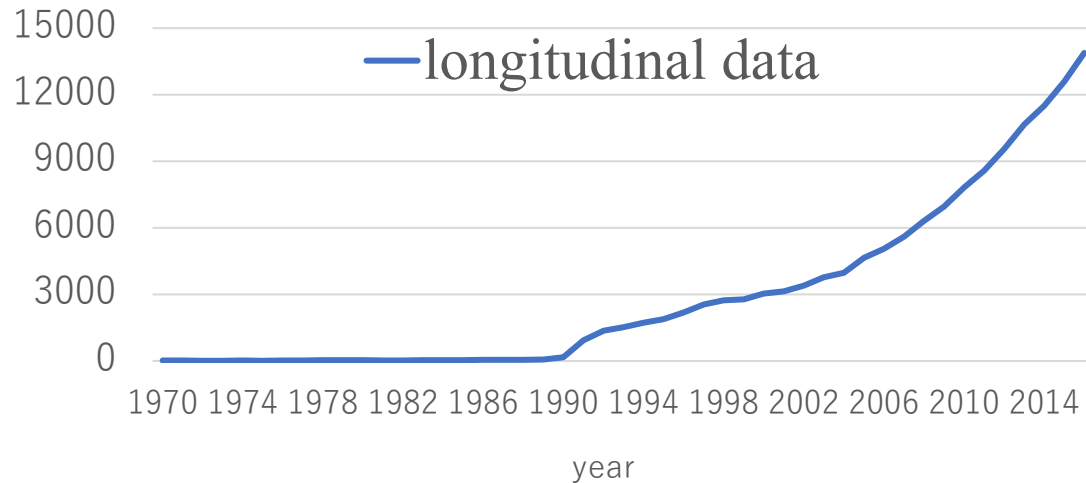


# 縦断データとは

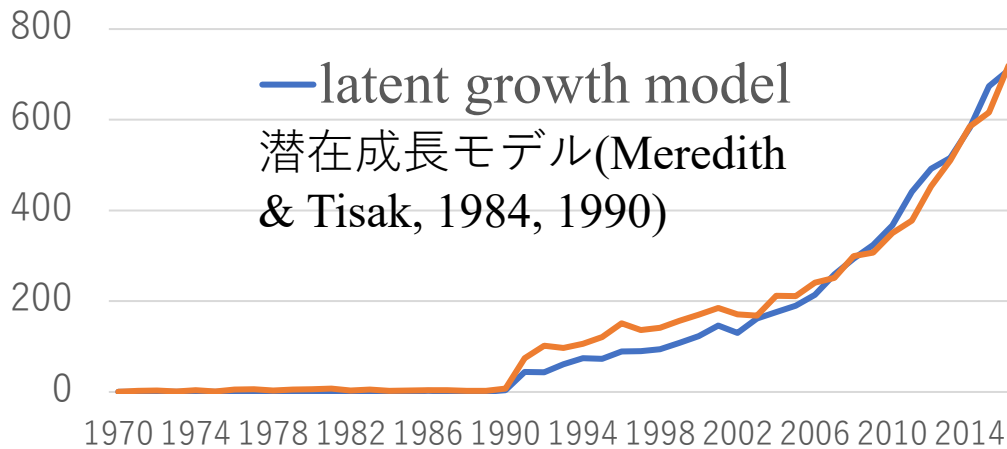
- 縦断データ (longitudinal data)...小学校六年間を通して得られた児童の身体測定データのように、複数の対象（児童）に対して複数回測定して得られるデータ。
- 横断データ (cross-sectional data)に比べ、時間的・経済的コストが高く、また分析方法は高度化し、欠測や練習効果を考慮する必要性もしばしば生じるが、国内外で縦断研究は増加傾向にある。

# 縦断研究数の推移

Psychological Methods, 2015



\*Web of Scienceにて longitudinal research, longitudinal designなどの関連用語も含めた時の「トピック」の該当件数



\*Web of Scienceにて latent curve model, cross-lagged regression (correlation)などの関連用語も含めた時の「トピック」の該当件数

"Comment on Pearl: Practical implications of theoretical results for causal mediation analysis": Correction to Imai et al. (2014).  
Pages iii. No authorship indicated. <http://dx.doi.org/10.1037/met0000035>

Abstract Purchase PDF Permissions Add To My List

Utilizing topology to generate and test theories of change.

Pages 1-25. Butner, Jonathan E.; Gagnon, Kyle T.; Geuss, Michael N.; Lessard, David A.; Story, T. Nathan. <http://dx.doi.org/10.1037/a0037802>

Abstract Purchase PDF Permissions Add To My List

An introduction to modeling longitudinal data with generalized additive models: Applications to single-case designs.

Pages 26-42. Sullivan, Kristynn J.; Shadish, William R.; Steiner, Peter M. <http://dx.doi.org/10.1037/met0000020>

Abstract Purchase PDF Permissions Add To My List

Modeling latent growth with multiple indicators: A comparison of three approaches.

Pages 43-62. Bishop, Jacob; Geiser, Christian; Cole, David A. <http://dx.doi.org/10.1037/met0000018>

Abstract Purchase PDF Permissions Add To My List

On disaggregating between-person and within-person effects with longitudinal data using multilevel models.

Pages 63-83. Wang, Lijuan (Peggy); Maxwell, Scott E. <http://dx.doi.org/10.1037/met0000030>

Abstract Purchase PDF Permissions Add To My List

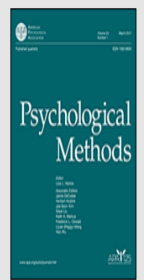
Meaningful aspects of change as novel random coefficients: A general method for reparameterizing longitudinal models.

Pages 84-101. Preacher, Kristopher J.; Hancock, Gregory R. <http://dx.doi.org/10.1037/met0000028>

Abstract Purchase PDF Permissions Add To My List

A critique of the cross-lagged panel model.

Pages 102-116. Hamaker, Ellen L.; Kuiper, Rebecca M.; Grasman, Raoul P. P. <http://dx.doi.org/10.1037/a0038889>



Editor  
Lisa Harlow, PhD

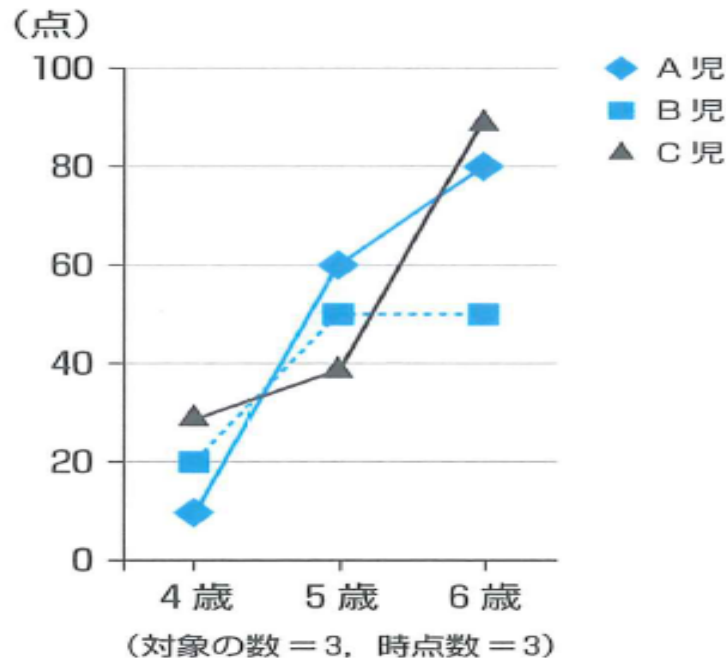
Impact Factor  
4.667

Volumes Covered  
1-22

Years Covered  
1996-Present

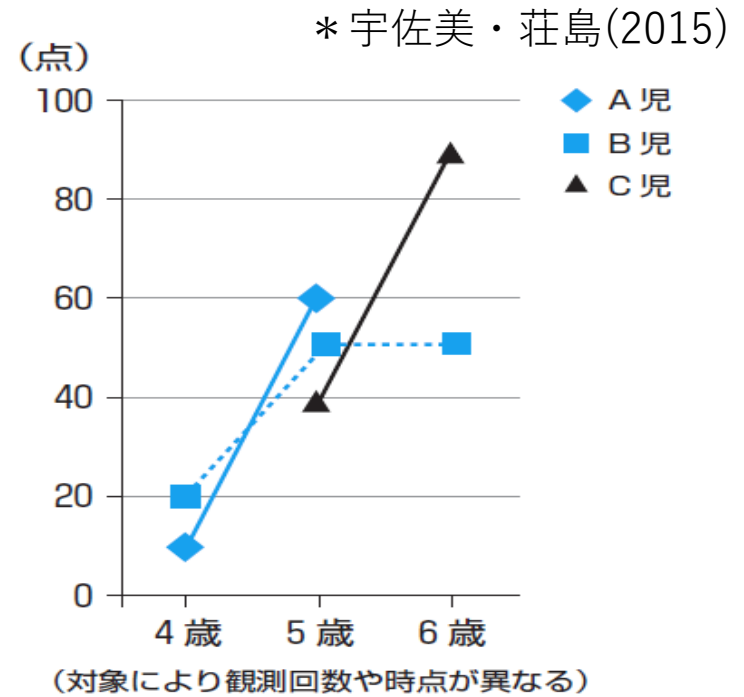
Number of Articles  
712

# 縦断データとは



・ 3名のデータ例。通常、個人の数 > 時点数。

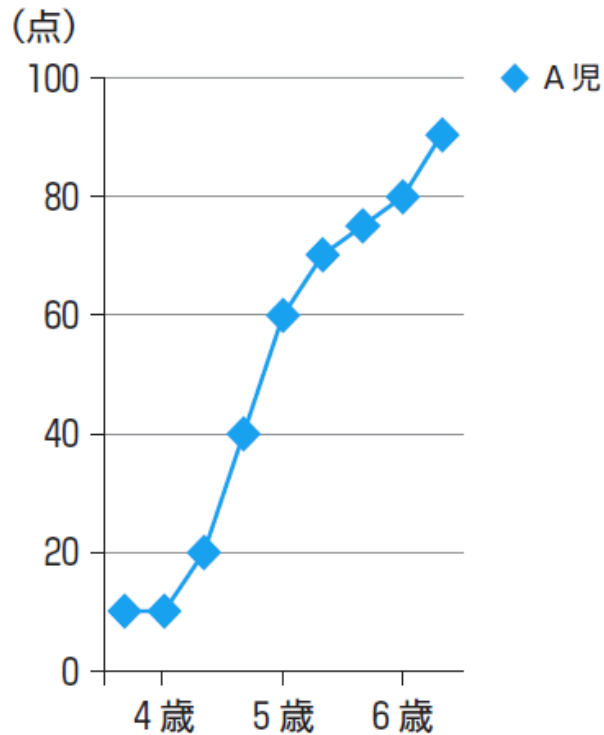
・ 縦断データは**パネルデータ**とも呼ばれるが、慣習的に、とくに（経済学の）人を対象とした調査研究で用いられる。



・ 個人によってデータの測定回数や測定時点が異なる場合。

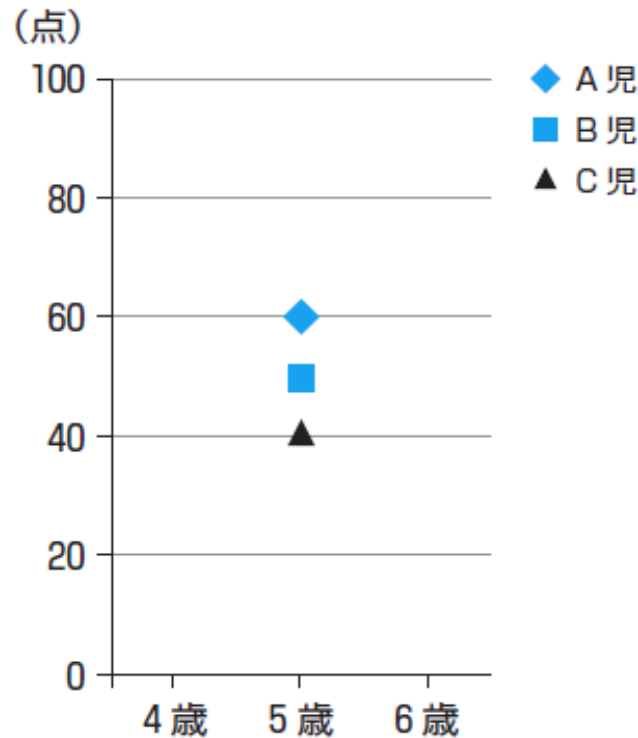
# 様々なタイプのデータ

\* 宇佐美・荘島(2015)



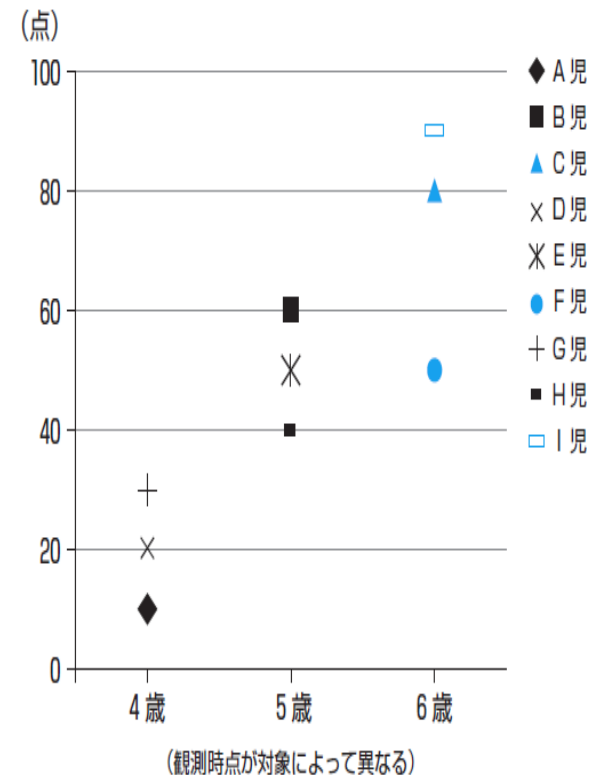
時系列データ

(time series data)



横断データ

\* 各個人、同一時点での1回の測定



反復横断データ

\* 各個人1回の測定で、個人によって測定時点が異なる。

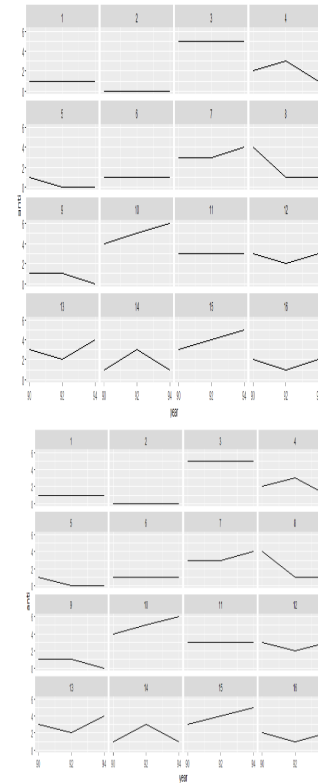
	対象数	時点数	同じ対象に複数回の観測
縦断データ	一般に多い (対象数 > 時点数)	2~10時点程度	行う
時系列データ	一事例など、 一般に少数 (対象数 < 時点数)	10~数百, 数万 時点程度	行う
横断データ	一般に多い (対象数 > 時点数)	1時点	行わない
反復横断データ	一般に多い (対象数 > 時点数)	2~20時点程度	行わない

- 他にも、**強縦断データ** (**intensive longitudinal data [ILD]**): 個人の数と時点数が多く、また測定時点間のラグは縦断データより短い)がある。
- **反復測定データ** (**repeated measures data**)も縦断データの意味で用いられることがある。



# 縦断研究の目的 (Baltes & Nesselrode, 1979; 宇佐美訳)

- (1) Identification of *intra*-individual change (個人内変化の特定)
- (2) Direct identification of *inter*-individual differences in *intra*-individual change (個人内変化における個人差の特定)
- (3) Analysis of *inter-relationships* in change (複数の変化の間の分析)
- (4) Analysis of *causes* (*determinants*) of *intra*-individual change (個人内変化の因果[規定因]の分析)
- (5) Analysis of *causes* (*determinants*) of *inter*-individual differences in *intra*-individual change (個人内変化における個人差の因果[規定因]の分析)



\*intra-individual (個人内)、inter-individual (個人間) はそれぞれ within-person、between-person と呼ぶことも多い。

(1)自尊心の軌跡（変化のパターン）は？

(2)自尊心の軌跡の個人差は？

(3)自尊心と反社会的行動の軌跡の関係は？

(4)自尊心の変化を説明する変数は？

(5)自尊心の変化の個人差を説明する変数は？

自尊心と反社会的行動の間関係の個人差を説明する変数は？

その他、

(6)自尊心の軌跡はどのように分類できるか？

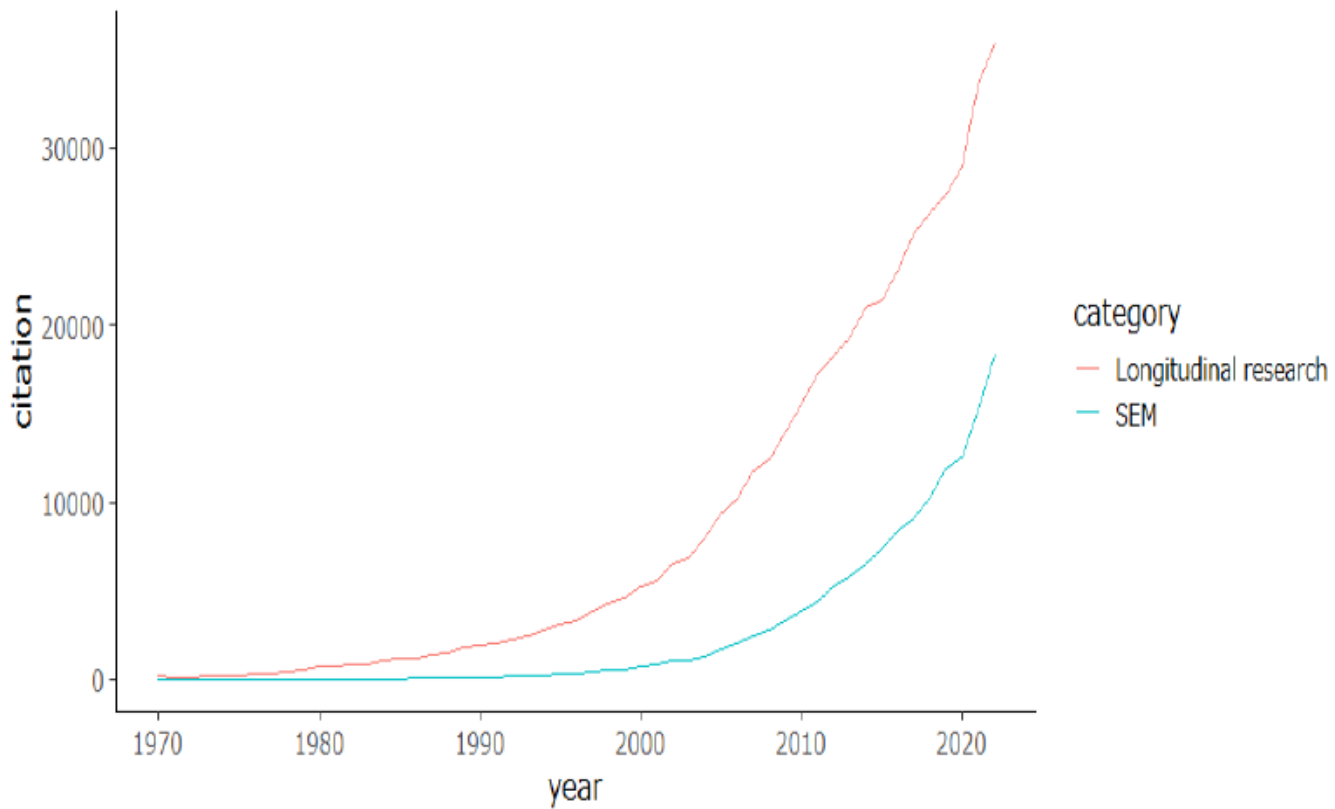
自尊心と反社会的行動の関係はどのように分類できるか？

(7)将来の自尊心の低さを高い精度で予測する変数は？（予測的研究：予防・介入）



# 縦断データ分析と構造方程式モデリング

## 縦断構造方程式モデリング (longitudinal structural equation modeling (SEM))



# 構造方程式モデリング (SEM)

- SEM(または、共分散構造分析[covariance structure analysis: CSA]) は、分析者が設定した様々な統計モデルの推定や評価のための一貫性の高いアプローチを提供する。
- SEM は、その下位モデルとして因子分析モデルやパス解析モデルなど多くのモデルを包含する。
- ソフトウェアもR (lavaan、sem パッケージ)、Mplus、Amos、OpenMx、Onyx など既に数多くの種類が利用可能。
- 特に、横断的な調査・観察研究においてSEM は既に広く利用されている。

# SEMに基づく縦断データ分析の特徴

- 1, 共通因子（潜在変数）を介して個々の軌跡を記述し、また軌跡の平均像や個人差、複数の変数に関する軌跡の関係性も記述できる。
- 2, 心理学的構成概念を取り扱うための共通因子や、他にも測定誤差を伴うモデルが容易に導入でき、共通因子を基盤とした軌跡の記述ができる。
- 3, 変数間の逐次的な関係を想定したモデルなど、多変数間の複雑な縦断的關係性を表現したモデルを導入できる。

# SEMに基づく縦断データ分析の特徴

- 4, 軌跡や関係性を記述する母数の集団差や背後にある潜在構造を検討できる。
- 5, 特定の母数間の等値制約や特定の対間の残差共分散の導入などモデル設定上の高い柔軟性がある。
- 6, モデルの推定オプションが多様であることに加え、適合度指標などを通したモデルの多面的な評価が可能。
- 7, (ランダム欠測[MAR]の仮定の下での) 完全情報最尤推定法 (FIML) に基づく欠測処理が利用可能。

# 量的研究（データサイエンス）における研究目的の分類

Hamaker, Mulder, & van IJzendoorn (2020); 宇佐美 訳

Developmental Cognitive Neuroscience 46 (2020) 100867



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Developmental Cognitive Neuroscience

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/dcn](http://www.elsevier.com/locate/dcn)



**Description, prediction and causation: Methodological challenges of studying child and adolescent development**

Ellen L. Hamaker<sup>a,\*</sup>, Jeroen D. Mulder<sup>a</sup>, Marinus H. van IJzendoorn<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Methodology and Statistics, Faculty of Social and Behavioural Sciences, Utrecht University, The Netherlands

<sup>b</sup> Department of Psychology, Education and Child Studies, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands

<sup>c</sup> School of Clinical Medicine, University of Cambridge, UK

## 1. 記述的研究（descriptive research）

集団（または個人）の特性についてまとめることが主目的。

## 2. 予測的研究（predictive research）

（選抜・選択・管理のための）将来値の予測が主目的。

## 3. 説明的研究（explanatory research）

介入の開発に資する、因果のメカニズムの根底を理解することが主目的。

# 縦断研究の場合の例

## 1. 記述的研究 (descriptive research)

- ・ 幼児の語彙力は時間とともにどのように推移する？
- ・ その個人差・集団差の大きさは？
- ・ 幼児の社会性の変化との相関関係は？

## 2. 予測的研究 (predictive research)

- ・ 3歳時の語彙力は、2歳時の語彙力からどれだけ正確に予測できるか？他にどのような説明変数を投入し、どのように予測力の高いモデルを構成するか？
- ・ 語彙の発達遅滞のリスクがある幼児をどのようにスクリーニングするか？

## 3. 説明的研究 (explanatory research)

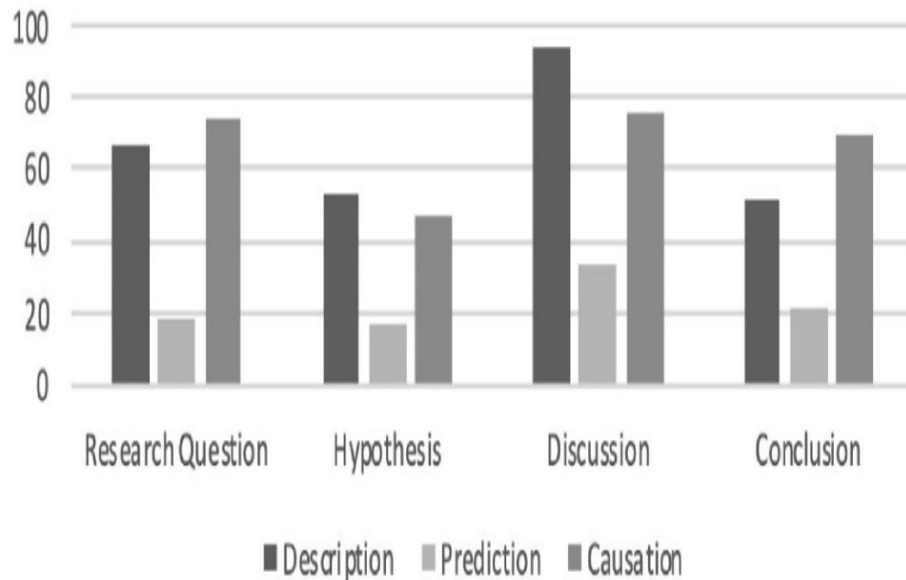
- ・ 本の読み聞かせは幼児の語彙力を飛躍的に高めるか？

# データ分析の前に

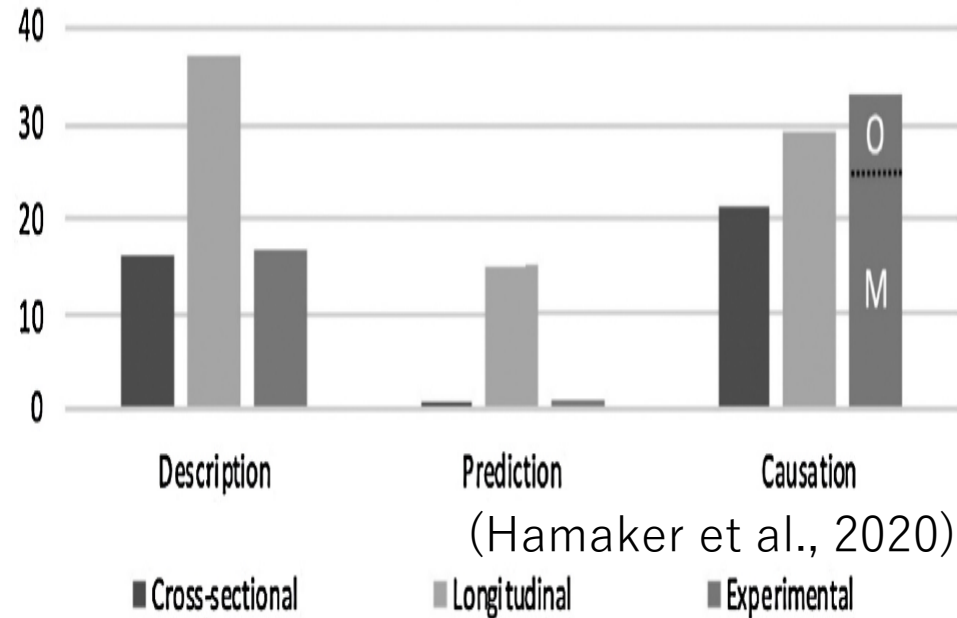
- ・研究目的（記述・予測・因果のうちどれか、またはどの組み合わせか）を明確化し、それを踏まえた研究デザインを立てる。
- ・実験的操作を行わない限り、横断研究では交絡の問題が強く影響する（交絡変数の特定・収集は重要）。
- ・縦断研究では、しばしば交絡変数と考えられる、過去の結果変数（ラグ付き変数）が収集できるため、説明的研究においてより強力な研究デザイン。
- ・交絡の影響が考えられるとき、独立変数の効果の推定値にはバイアスが生じ、因果の証拠としては弱いことから「（独立変数が）影響している」・「規定している」といった強い表現の使用には慎重な検討が必要。

# 発達科学研究における研究目的と研究デザイン

Research goals in 100 CID studies



Combination of design and goals in 100 CID studies



(Hamaker et al., 2020)

- ・ 発達研究（縦断・横断それぞれ含む）においては**記述的・説明的研究**志向が強い。
- ・ このことは、縦断研究に限っても同様。
- ・ 予測的研究も、勿論必要。



# 本講演のねらい

・本講演では、記述的・説明的研究のための方法に重みづけしながら、SEMに基づく縦断データ分析について概観していく。

## ・記述的研究

潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング

軌跡の分類と潜在成長混合モデリング

## ・説明的研究

交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測

強縦断データと動学的SEM

## ・その他

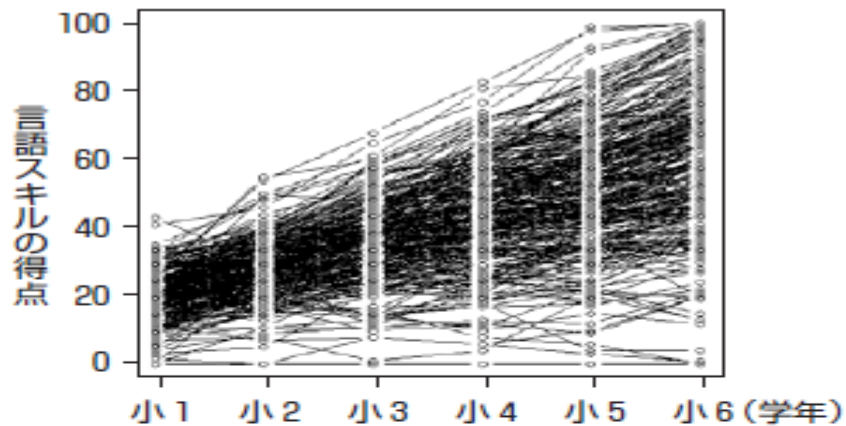
欠測データの処理

# アウトライン

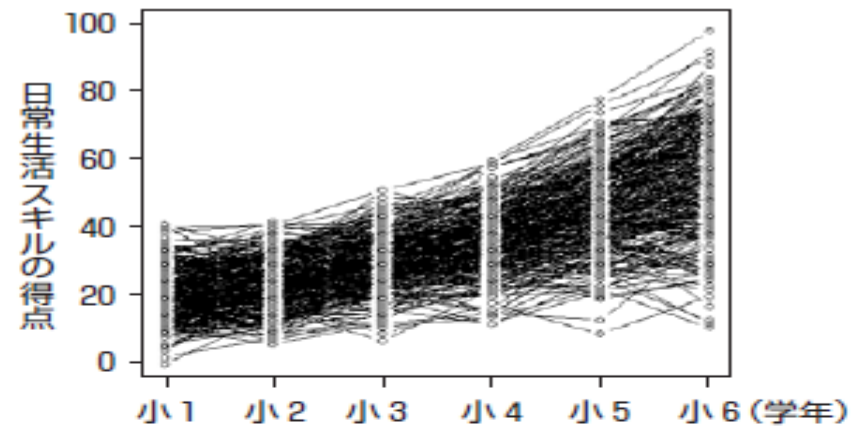
- 導入
- 潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング
- 交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測
- 強縦断データと動学的SEM
- 軌跡の分類と潜在成長混合モデリング
- 欠測データの処理

# 変化を記述する

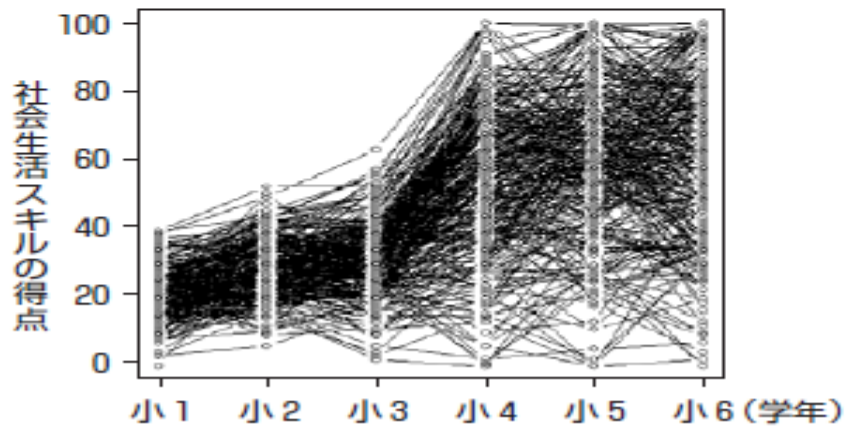
縦断データ (N = 300、T = 6) の例(宇佐美・荘島、2015)



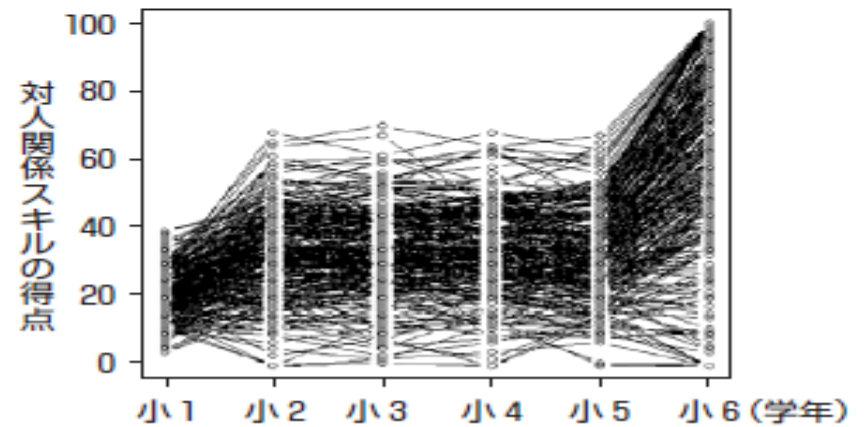
① 言語スキル得点



② 日常生活スキル得点



③ 社会生活スキル得点

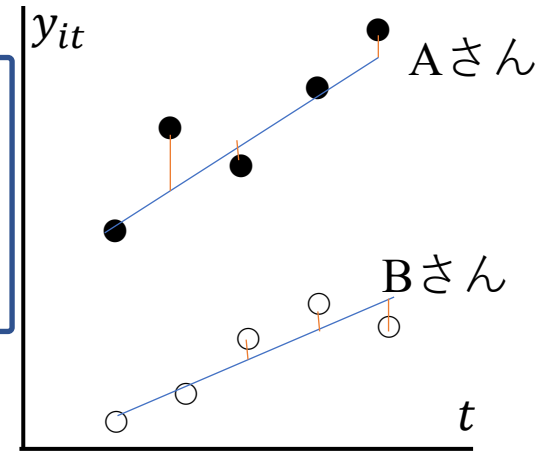


④ 対人関係スキル得点

縦断データに見られる変化やその個人差をどう表現するか？

# 潜在成長モデル (latent growth model: LGM)の基本表現

$$y_{it} = \underbrace{I_i + w_t S_i}_{\text{軌跡}} + \underbrace{e_{it}}_{\text{残差}}$$



$y_{it}$  : 時点 $t$ における個人 $i$ の測定値。

$I_i$  : 個人 $i$ の切片因子得点(intercept factor score):最初の時点( $t = 1$ )における個人 $i$ の軌跡の値。  $E(I_i) = \mu_I, V(I_i) = \varphi_I^2$

$S_i$  : 個人 $i$ の傾き因子得点(slope factor score):軌跡の値の時点間の変化量を反映する量。  $E(S_i) = \mu_S, V(S_i) = \varphi_S^2, cov(I_i, S_i) = \varphi_{IS}$

$w_t$  : 時点 $t$ において $S_i$ にかかる重み。

$e_{it}$  : (測定誤差やモデルの誤設定の影響を反映する) 残差。

$$E(e_{it}) = 0, V(e_{it}) = \psi_t^2, cov(e_{it}, e_{i't'}) = cov(e_{it}, e_{it'}) = 0.$$

# パス図による表現 (T=5の場合)

$$y_{it} = I_i + w_t S_i + e_{it}$$

四角...観測変数

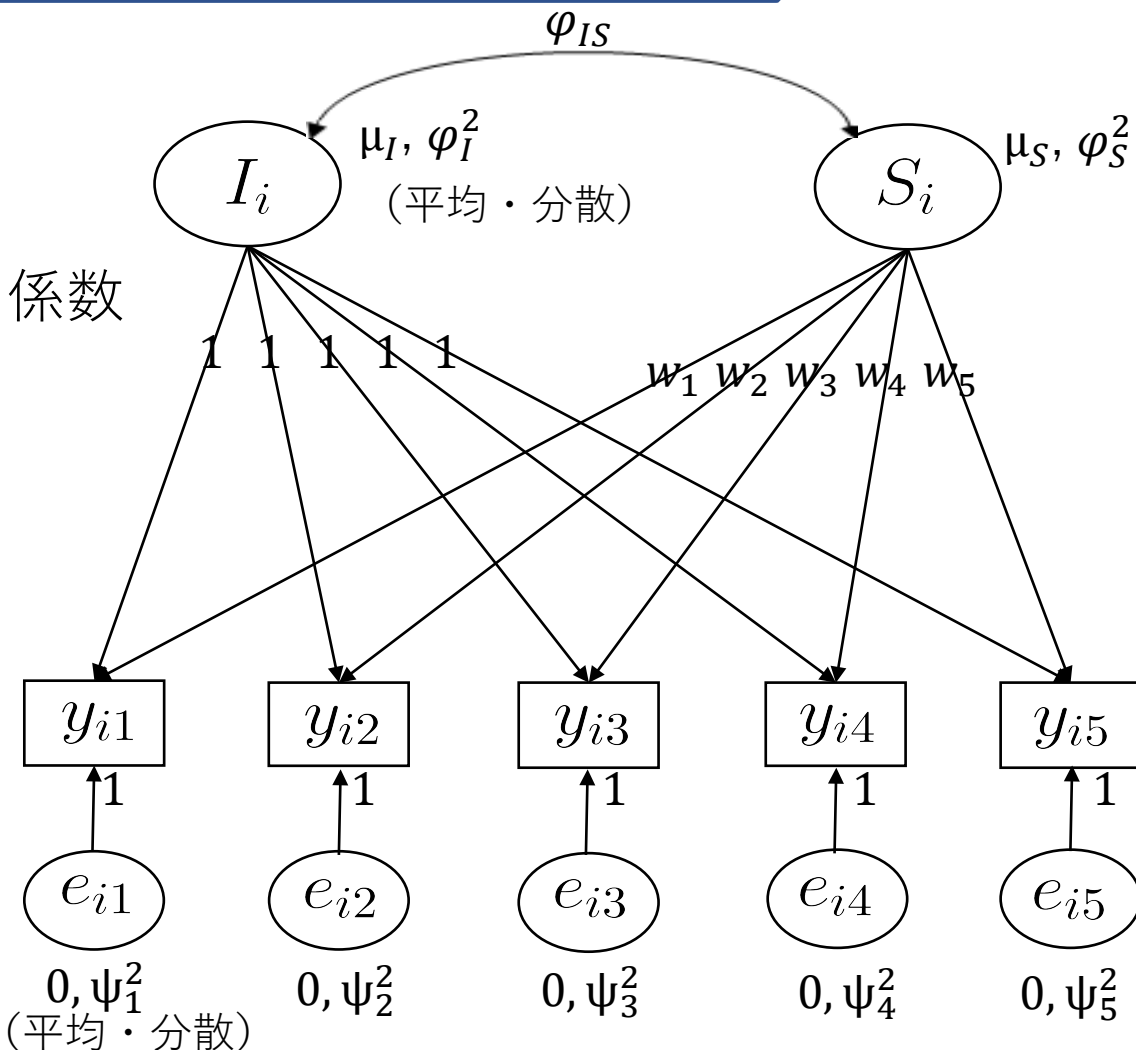
丸...潜在変数 (共通因子)

・測定誤差・残差

単方向矢印...パス (回帰) 係数

・因子負荷

双方向矢印...共分散



真値についての式:

$$f_{yi1} = I_i + w_1 S_i$$

$$f_{yi2} = I_i + w_2 S_i$$

$$f_{yi3} = I_i + w_3 S_i$$

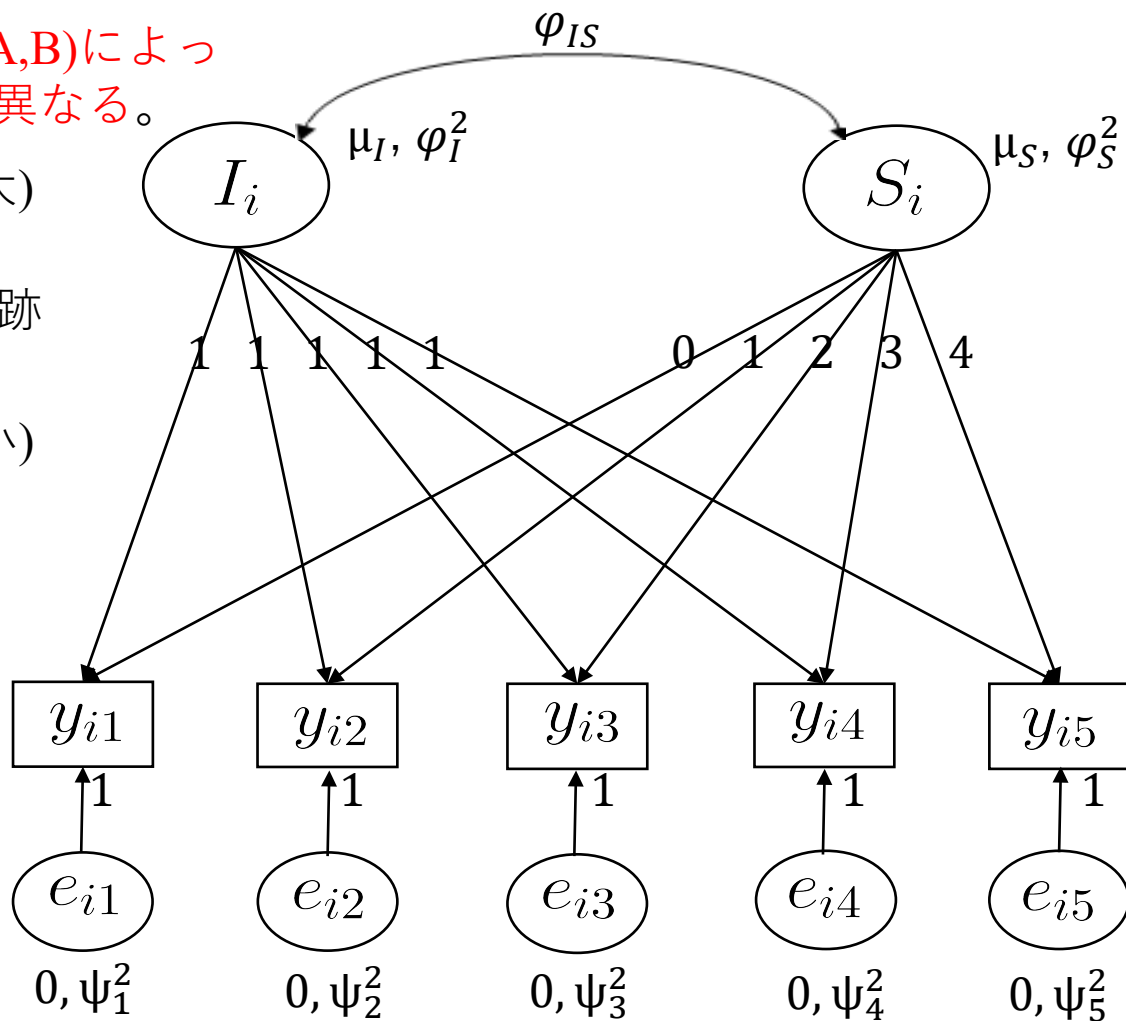
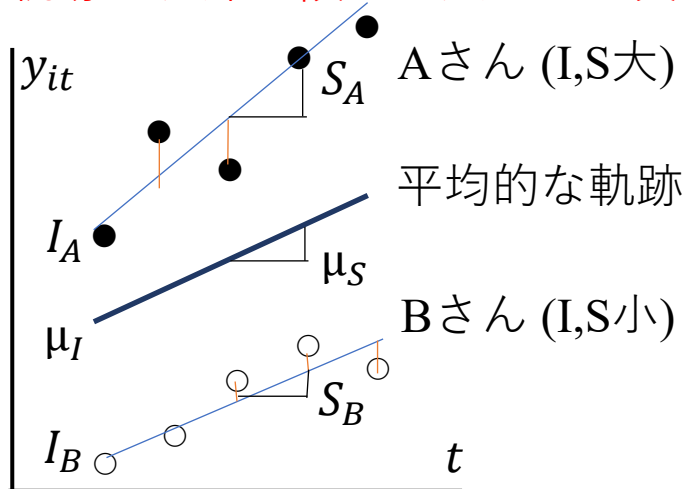
$$f_{yi4} = I_i + w_4 S_i$$

$$f_{yi5} = I_i + w_5 S_i$$

# 線形LGM

$$y_{it} = I_i + (t - 1)S_i + e_{it} \quad (w_t = t - 1)$$

yが線形的に変化するが、個人(A,B)によって軌跡の切片・傾きの大きさが異なる。



$$f_{yi1} = I_i + 0 \times S_i$$

$$f_{yi2} = I_i + 1 \times S_i$$

$$f_{yi3} = I_i + 2 \times S_i$$

$$f_{yi4} = I_i + 3 \times S_i$$

$$f_{yi5} = I_i + 4 \times S_i$$

# LGMの基本的な考え方（1）

- ・それぞれの個人について、真の軌跡（成長軌跡[growth curve]または発達軌跡 [developmental trajectory]）がある。
- ・真の軌跡は、線形などの特定の（しばしば、単純化された）関数で表現され、関数形は個人間で共通。
- ・観測データは、（測定誤差やモデルの誤設定の影響を反映する）残差の影響を受けており、真の軌跡は直接観測できない。
- ・軌跡の平均や個人差は潜在変数（共通因子）から特徴づけられる。
- ・線形LGM内の母数は因子得点の平均 $\mu_I, \mu_S$ 、（共）分散 $\varphi_I^2, \varphi_S^2, \varphi_{IS}$ 、残差分散 $\psi_t^2$ 。母数の識別のため3以上の時点数が必要。

## LGMの基本的な考え方（2）

- ・ 因子の種類や重み、関数形を変えることで、様々な形状の軌跡を表現できる（後述）。
- ・ 多くの場合、軌跡の平均と個人差の推定に関心をもたれるが、各個人の軌跡に関心があればそれも推定できる（因子得点の推定の問題）。
- ・ 個人によって異なる関数形を考える場合→潜在成長混合モデル（latent growth mixture model; LGMM, 後述）。



# SEMによる推定の考え方

- 実際のデータ（標本）における平均・分散・共分散（積率）に対して、設定したモデルの構造（平均構造・共分散構造：母数の関数で表現される）が「近く」なるように母数を推定する。
- （線形）LGMの平均構造と共分散構造

モデル（平均・共分散構造）

$$\begin{aligned}\mu_t(\theta) &= \mu_I + w_t\mu_S \\ &= \mu_I + (t - 1)\mu_S\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{tt'}(\theta) &= \phi_I^2 + w_t w_t' \phi_S^2 \\ &\quad + (w_t + w_t') \phi_{IS} \\ &= \phi_I^2 + (t - 1)(t' - 1)\phi_S^2 \\ &\quad + (t + t' - 2)\phi_{IS} \quad (t \neq t')\end{aligned}$$

データ（標本平均・共分散）

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
$\bar{y}$	40	10	10	10	10

$S$



近づける

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
$y_1$	40	10	10	10	10
$y_2$	10	40	15	10	20
$y_3$	10	15	45	30	30
$y_4$	10	10	30	60	30
$y_5$	10	20	30	30	70

# 最尤法による推定

- 対数尤度  $\log L$  (データに多変量正規性を仮定)

$$\log L = -\frac{1}{2}N \{(\bar{y}-\mu(\theta))^t \Sigma(\theta)^{-1}(\bar{y}-\mu(\theta)) + \log |\Sigma(\theta)| + tr[S \Sigma(\theta)^{-1}]\} + c$$

$\bar{y}$  ... 標本平均ベクトル  $\theta$  ... 母数ベクトル  $S$  ... 標本共分散行列

$\mu(\theta)$  ... 平均構造  $\Sigma(\theta)$  ... 共分散構造

$c$  ... 定数

- $\log L$  の最大化は下記  $F_{ML}$  の最小化に等しい (尤度比検定) :

$$F_{ML} = (\bar{y}-\mu(\theta))^t \Sigma(\theta)^{-1}(\bar{y}-\mu(\theta)) + \log |\Sigma(\theta)| - \log |S| + tr[S \Sigma(\theta)^{-1}] - p$$

$p$  ... 変数の数

- モデルが正しく設定されれば、大標本( $N \rightarrow \infty$ )の下で、得られる推定値は漸近的に有効で、不偏で、一致性がある (Bollen, 1989)。

より詳細は、補  
足資料を参照

## 構造方程式モデル (f:潜在変数,y:観測変数)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix}}_z = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{f0} \\ \alpha_{y0} \end{pmatrix}}_{\alpha_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} A_a & A_d \\ A_b & A_c \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix}}_z + \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}}_u \quad \begin{aligned} z &= \alpha_0 + Az + u \\ y &= Gz \end{aligned}$$

平均構造 (θ はモデル内の母数)

$$\mu(\theta) = E[y] = G(I - A)^{-1}\alpha_0 + G(I - A)^{-1}E[u] = G(I - A)^{-1}\alpha_0$$

共分散構造

$$\begin{aligned} \Sigma(\theta) &= E[(y - E[y])(y - E[y])^\top] \\ &= G(I - A)^{-1}E[uu^\top]((I - A)^{-1})^\top G^\top \\ &= G(I - A)^{-1}\Sigma_u((I - A)^{-1})^\top G^\top \end{aligned}$$

より詳細は、補  
足資料を参照

適合度指標 (Tは検定統計量、dfはモデルの自由度、hは  
設定モデル、b はベースラインモデル)

$$T_{ML} = (N - 1)\hat{f}_{ML}$$

$$RMSEA = \max \left( 0, \sqrt{\frac{T_h - df_h}{(N - 1)df_h}} \right)$$

$$CFI = \min \left( 1, \frac{(T_b - df_b) - (T_h - df_h)}{T_b - df_b} \right) \quad SRMR = \sqrt{\frac{2}{P(P + 1)} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^i \left( \frac{s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}}{s_i s_j} \right)^2}$$

# 分析の実行 (lavaan)

- SEMによる分析は、Mplus, OpenMx, R(lavaan, semパッケージ), Amos, Onyxなど様々なソフトウェアから実行可能。
- ここでは、近年最もよく利用され、かつフリーで実行できる lavaan(latent variable analysis; Rosseel, 2012)の分析例を紹介する。

- lavaanのHP (インストールやコード例)

<https://lavaan.ugent.be/>

- マニュアル・コード例

<https://lavaan.ugent.be/tutorial/tutorial.pdf> (英語)

<http://www.ec.kansai-u.ac.jp/user/arakit/documents/lavaanTutorial20170124.pdf> (日本語)

豊田秀樹編 (2014). 共分散構造分析R編 東京図書

## lavaan

latent variable analysis

[About lavaan](#) [Tutorial](#) [Resources](#) [Version History](#)

### Tutorial

Overview

Before you start

Installation

Model syntax 1

A CFA example

A SEM example

Model syntax 2

Meanstructures

Multiple groups

Growth curves

Categorical data

Covariance matrix input

Another important type of latent variable models are latent growth curve models. Growth modeling is often used to analyze longitudinal or developmental data. In this type of data, an outcome measure is measured on several occasions, and we want to study the change over time. In many cases, the trajectory over time can be modeled as a simple linear or quadratic curve. Random effects are used to capture individual differences. The random effects are conveniently represented by (continuous) latent variables, often called *growth factors*. In the example below, we use an artificial dataset called `Demo.growth` where a score (say, a standardized score on a reading ability scale) is measured on 4 time points. To fit a linear growth model for these four time points, we need to specify a model with two latent variables: a random intercept, and a random slope:

```
# linear growth model with 4 timepoints
# intercept and slope with fixed coefficients
i =~ 1*t1 + 1*t2 + 1*t3 + 1*t4
s =~ 0*t1 + 1*t2 + 2*t3 + 3*t4
```

In this model, we have fixed all the coefficients of the growth functions. To fit this model, the lavaan package provides a special `growth()` function:

# 分析例

- ・ 東大附属の生徒（中1－高3）を対象に実施した「こころとからだの健康アンケート」調査（2009-2013）における睡眠習慣と精神的健康の縦断データ。N=1067, T=6（学年が時間単位）。
- ・ **睡眠習慣**（平日・休日の睡眠時間[分]・起床時間・就寝時間）
- ・ **精神的健康**（GHQ[General Health Questionnaire]:0-12点,得点が高いほど健康状態が悪い）

Matamura, M., Tochigi, M., Usami, S., Yonehara, H., Fukushima, M., Nishida, A., Togo, F., & Sasaki, T. (2014). Associations between sleep habits and mental health status and suicidality in the longitudinal survey of monozygotic-twin adolescents. *Journal of Sleep Research*, 23, 290-294.

股村美里・宇佐美慧・福島昌子・米原裕美・東郷史治・西田淳志・佐々木司 (2013). 中高生の睡眠習慣と精神的健康の変化に関する縦断的検討 学校保健研究, 55, 186-197.

# CSVファイル

\*複数のコホートがあり、また個人（生徒）によって調査への参加時期が異なる。

# コード例 (睡眠時間に関する線形LGM)

```
Data<-read.csv("C:/Users/Satoshi
Usami/Desktop/PUBLIC2/ExampleDataCedep2020.csv",header=T)
library(MASS)
require("lavaan")
LGMT6 <- '
  Iy=~1*sleep1+1*sleep2+1*sleep3+1*sleep4+1*sleep5+1*sleep6
  Sy=~0*sleep1+1*sleep2+2*sleep3+3*sleep4+4*sleep5+5*sleep6
  Iy~muIy*1;Sy~muSy*1
  sleep1~0*1;sleep2~0*1;sleep3~0*1;sleep4~0*1;sleep5~0*1;sleep6~0*1;
'
```

データの読み込み

lavaanの呼び出し

線形LGMの記述。各因子を定義。sleepは変数名。

因子平均の設定。

LGMの当てはめ

分析結果の呼び出し

切片が0であることを設定 (後述)。

# 分析結果 (1)

```
> summary(fit, fit.measures = TRUE)
lavaan 0.6-7 ended normally after 219 iterations
```

## 推定の基本情報

Estimator	ML	
Optimization method	NLMINB	
Number of free parameters	11	
	Used	Total
Number of observations	1066	1067
Number of missing patterns	25	

Model Test User Model:

## 設定モデルの情報

Test statistic	29.691
Degrees of freedom	16
P-value (Chi-square)	0.020

Model Test Baseline Model:

## 独立 (ベースライン) モデルの情報

Test statistic	605.766
Degrees of freedom	15
P-value	0.000

User Model versus Baseline Model:

## 適合度指標

Comparative Fit Index (CFI)	0.977
Tucker-Lewis Index (TLI)	0.978

Loglikelihood and Information Criteria:

## 適合度指標・情報量規準

Loglikelihood user model (H0)	-16140.668
Loglikelihood unrestricted model (H1)	-16125.823
Akaike (AIC)	32303.336
Bayesian (BIC)	32358.025
Sample-size adjusted Bayesian (BIC)	32323.087

Root Mean Square Error of Approximation:

RMSEA	0.028
90 Percent confidence interval - lower	0.011
90 Percent confidence interval - upper	0.044
P-value RMSEA <= 0.05	0.990

Standardized Root Mean Square Residual:

SRMR	0.060
------	-------

Parameter Estimates:

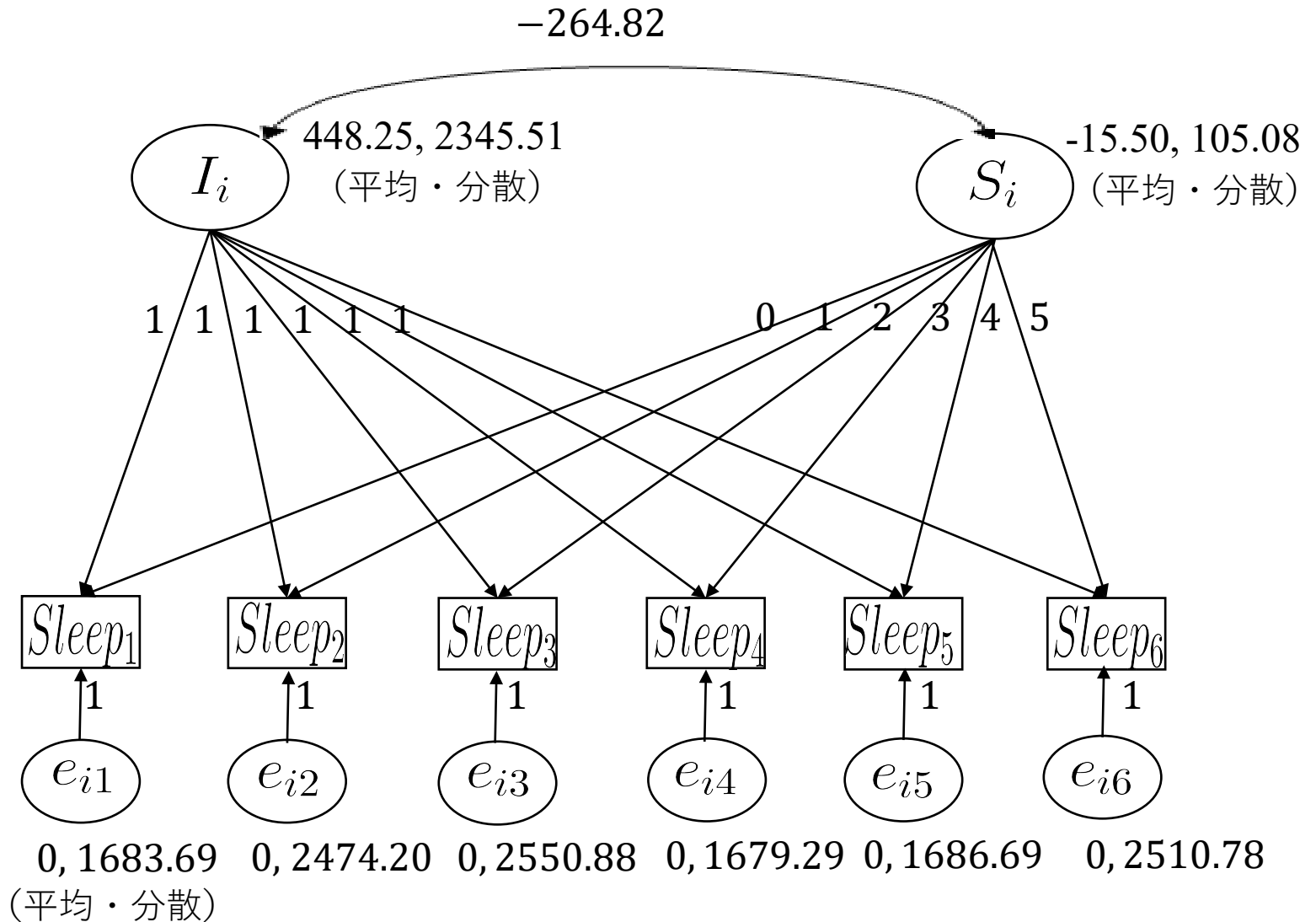
Standard errors	Standard
Information	Observed
Observed information based on	Hessian



# 分析結果 (2)

Latent Variables:					Intercepts:					
推定結果					点推定値 SE z値 p値					
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z )		Estimate	Std.Err	z-value	P(> z )	
	点推定値	SE	z値	p値						
Iy =~					Iy	(muIy)	448.245	2.324	192.896	0.000
sleep1	1.000				Sy	(muSy)	-15.499	0.718	-21.577	0.000
sleep2	1.000				.sleep1		0.000			
sleep3	1.000				.sleep2		0.000			
sleep4	1.000				.sleep3		0.000			
sleep5	1.000				.sleep4		0.000			
sleep6	1.000				.sleep5		0.000			
Sy =~					.sleep6		0.000			
sleep1	0.000									
sleep2	1.000									
sleep3	2.000									
sleep4	3.000									
sleep5	4.000									
sleep6	5.000									
Covariances:					Variances:					
	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z )		Estimate	Std.Err	z-value	P(> z )	
	点推定値	SE	z値	p値						
Iy ~~					.sleep1	1683.689	215.299	7.820	0.000	
Sy	-264.816	75.832	-3.492	0.000	.sleep2	2474.201	210.036	11.780	0.000	
					.sleep3	2550.882	189.205	13.482	0.000	
					.sleep4	1679.289	157.392	10.669	0.000	
					.sleep5	1686.675	160.075	10.537	0.000	
					.sleep6	2510.784	261.104	9.616	0.000	
					Iy	2345.507	237.825	9.862	0.000	
					Sy	105.077	27.589	3.809	0.000	

# 分析結果 (3) パス図



# 結果の解釈（1）

## ・切片因子 $\mu_I$ の解釈

各生徒の変化のパターンにおける最初（中1）の平均が448.25(分)。

切片因子の分散 $\varphi_I^2$ は2345.51（標準偏差は48.43）。正規性を仮定した場合、中1での生徒の真値の多く（約95%）は $448.25 \pm 2 \times 48.43$ 、つまり351.39から545.11(約6-9時間)の間に含まれると考えられる。

## ・傾き因子 $\mu_S$ の解釈

傾き因子の平均が-15.50なので、1時点（1年間）経過すると平均的に真値が15.50下がる。切片の平均が448.25なので、中1～高3の順に、真値の平均は、448.25, 432.75, 417.25, 401.75, 386.25, 370.75となる。

→軌跡の平均像（反復測定ANOVAを用いない差の評価）

傾き因子の分散 $\varphi_S^2$ は105.08（標準偏差は10.25）であった。平均 $\pm 2 \times$ 標準偏差を評価すると、**多くの生徒の傾きは負であると分かる。**

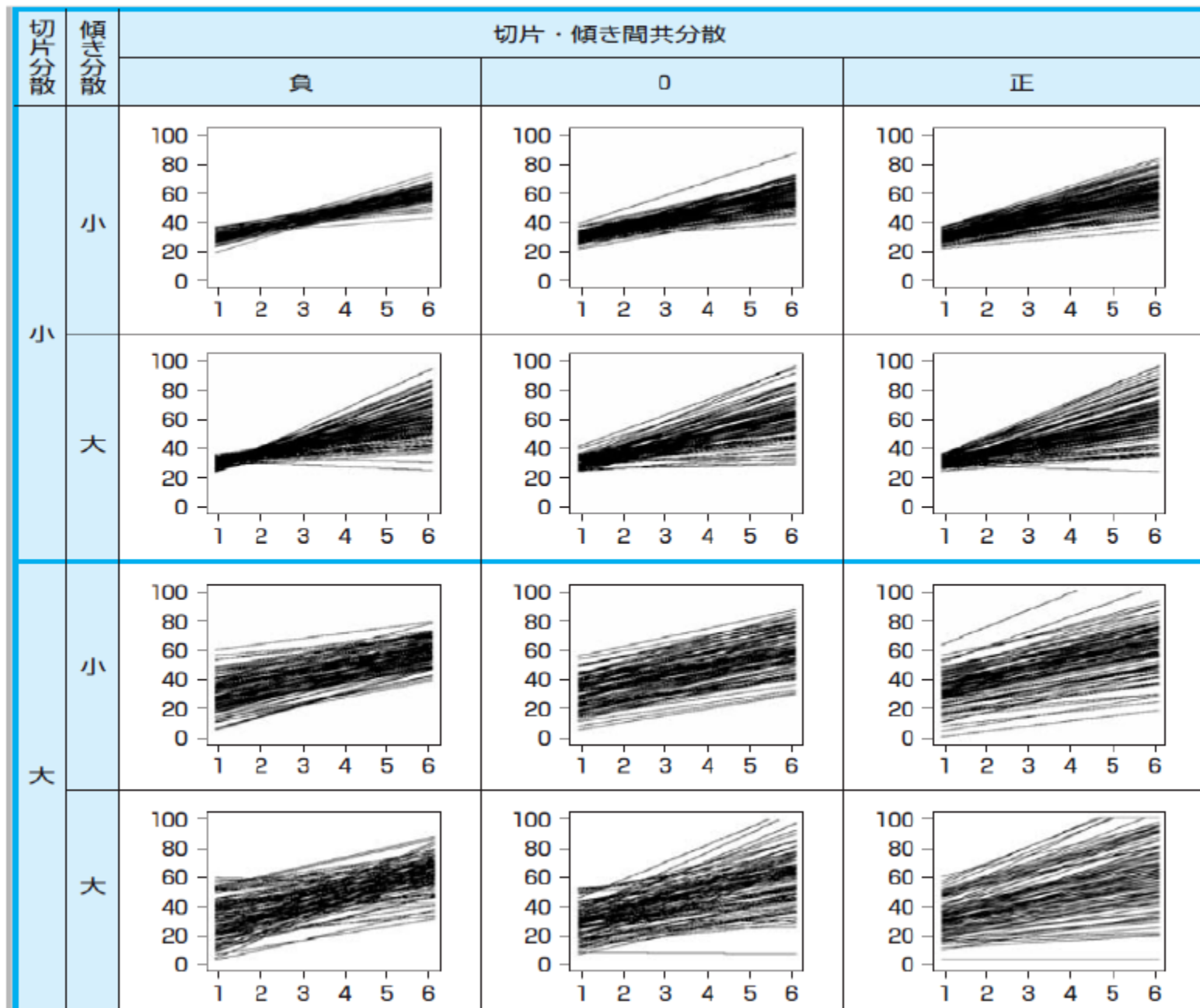
## 結果の解釈（2）

### 切片・傾き因子間共分散 $\varphi_{IS}$

- 切片・傾き因子間共分散は-264.82と負の値。つまり、最初の睡眠時間が長い生徒ほど後の睡眠時間の減り方が大きい傾向にある。
- 相関係数(= 切片・傾き因子間共分散 / (切片因子の標準偏差 × 傾き因子の標準偏差)のほうが解釈しやすい（標準化解も参照できる）。相関係数は-0.533となる。

### 残差分散 $\psi_t^2$

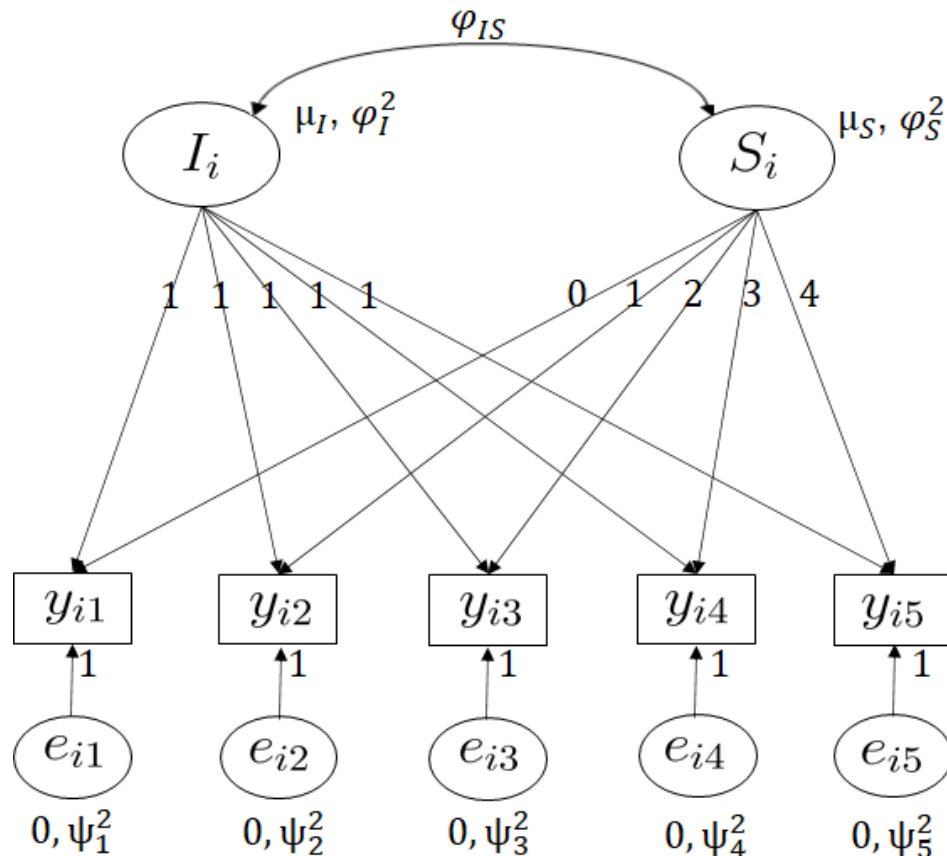
- 最初の時点（中1）の残差分散の推定値は1683.69（標準偏差は41.03）。中1時の共通因子（軌跡）で説明できる分散の割合（決定係数）は $2345.51 / (2345.51 + 1683.69) = 0.582$ 。残差分散の大きさは学年間で大きな違いはない。



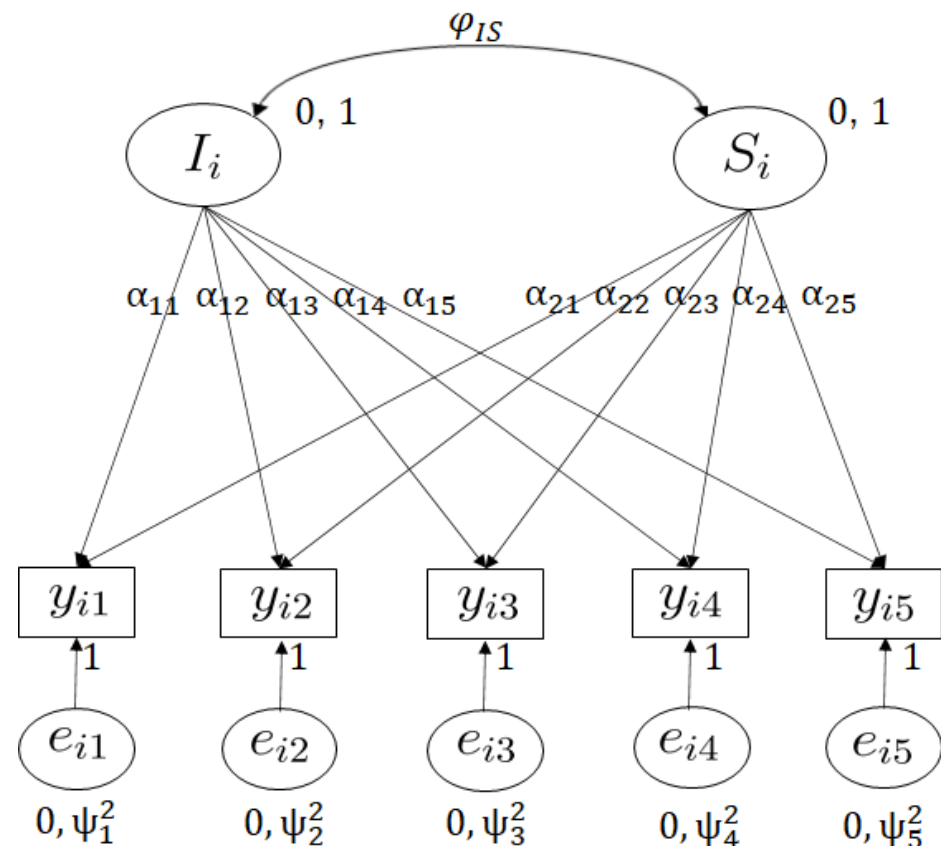
# 補足：線形LGMと因子分析モデル

- ・線形LGMは（平均構造を伴う、確認的な）二因子分析モデル。  
 → 因子平均や因子分散を自由推定する代わりに、パス係数（因子負荷）を固定する。観測変数の切片も0。

線形LGM



因子分析モデル



## 補足：階層線形モデル(HLM;または混合効果モデル)との関係

- ・ LGMの切片因子、傾き因子と重みは、HLMのランダム切片、ランダム傾きおよび（時点を表す）独立変数にそれぞれ対応する。

\*1つの典型的な設定

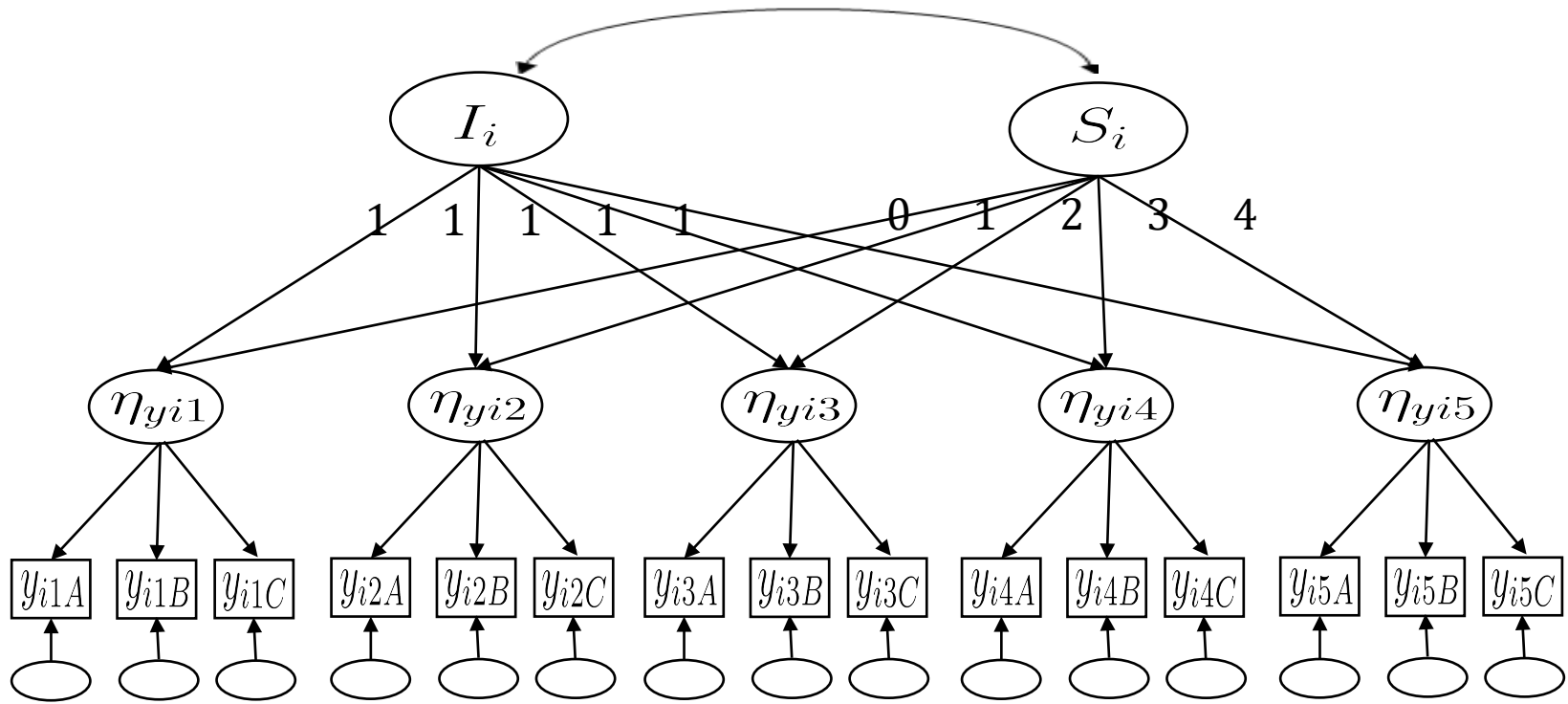
$$\text{HLM} \quad y_{it} = \alpha_i + \beta_i x_t + e_{it} \quad e_{it} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\text{LGM} \quad y_{it} = I_i + w_t S_i + e_{it} \quad e_{it} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

- ・ 多変量の従属変数や共通因子間の扱いが容易であるのは LGM(SEM)の利点 (e.g., Curran, 2003; McNeish & Metta, 2018)。
- ・ LGMでは測定誤差を明示的にモデリングでき、さらにSEMで提案されている様々な推定量や適合度指標が利用可能。
- ・ 一方、LGMは各個人のデータが同じ時点で測定されていることを通常仮定するが（ただし欠測として扱うことはできる）、HLMでは測定時点や回数が個人間で変わる一般的な状況であっても可能。

# 多重指標 (multiple indicator) LGM

- ・ 多重指標を縮約する共通因子得点の変化を記述するLGM。  
← 独自成分を含む合計点を扱う場合とは概念的に異なる。
- ・ 各時点で同じ因子分析モデル (因子負荷・独自分散) を仮定してよいかに関する測定不変性の検討が必要。





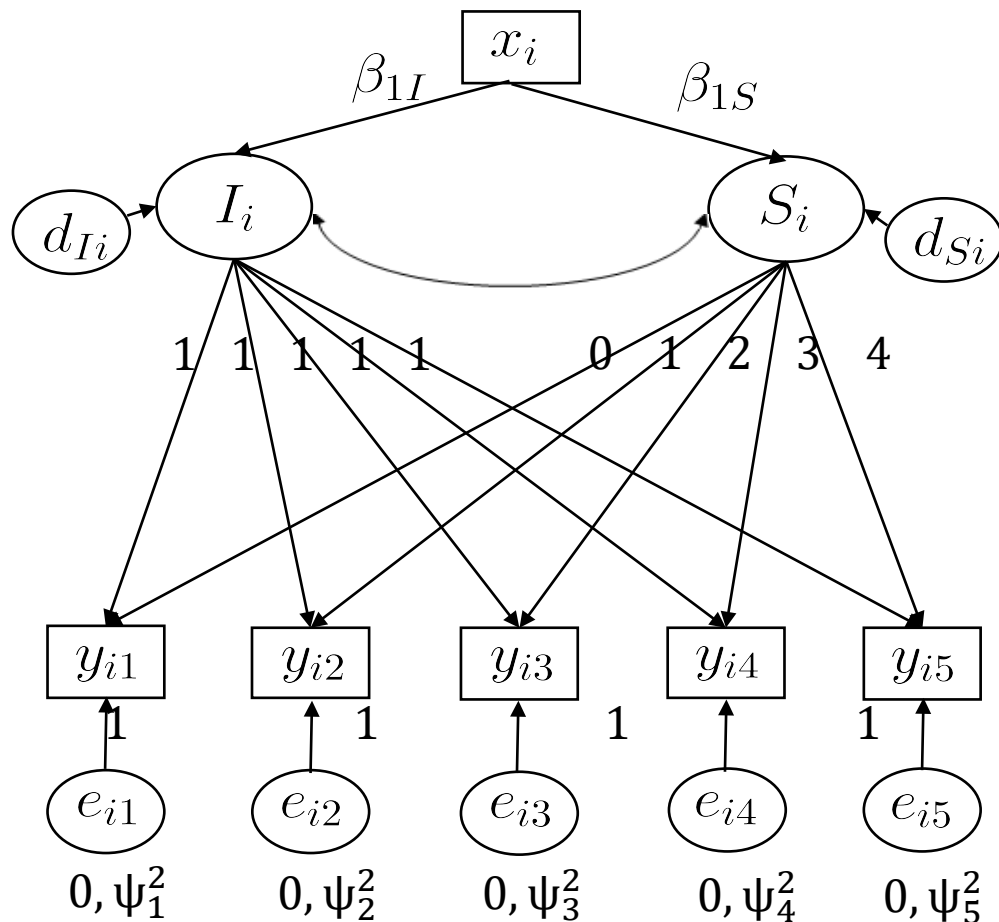
# 条件付(conditional) LGM (時不変的変数)

$$y_{it} = I_i + (t - 1)S_i + e_{it}$$

$$I_i = \beta_{0I} + \beta_{1I}x_i + d_{Ii} \quad S_i = \beta_{0S} + \beta_{1S}x_i + d_{Si}$$

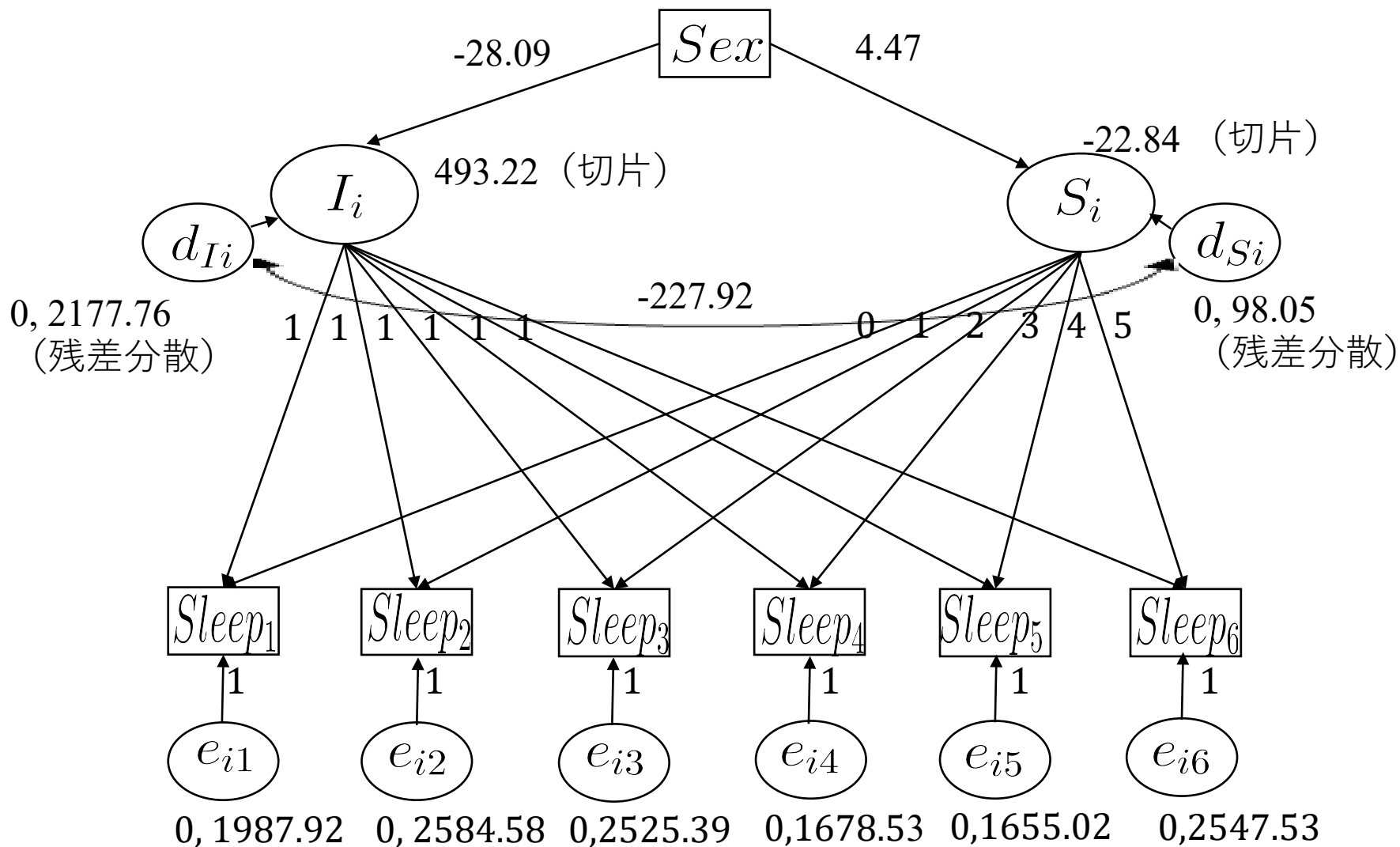
・切片や傾き因子得点の個人差を、(性別・出生年など) 測定期間中に変化のない時不変(time-invariant)的な変数を主に使った回帰式により説明する。

・時不変的な変数XのYへの効果は時点によって異なることを暗に表現。



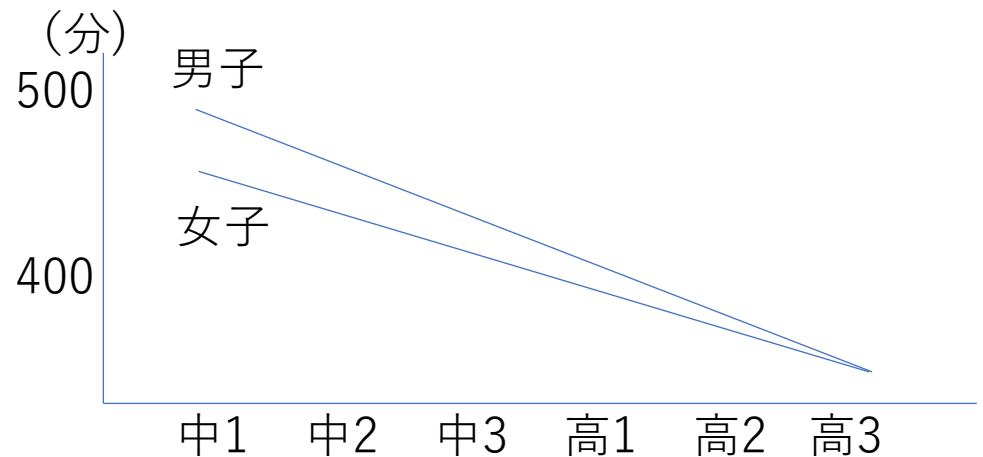
# 睡眠時間データを使った分析例

Sex: 男子=0, 女子=1



# 結果の解釈

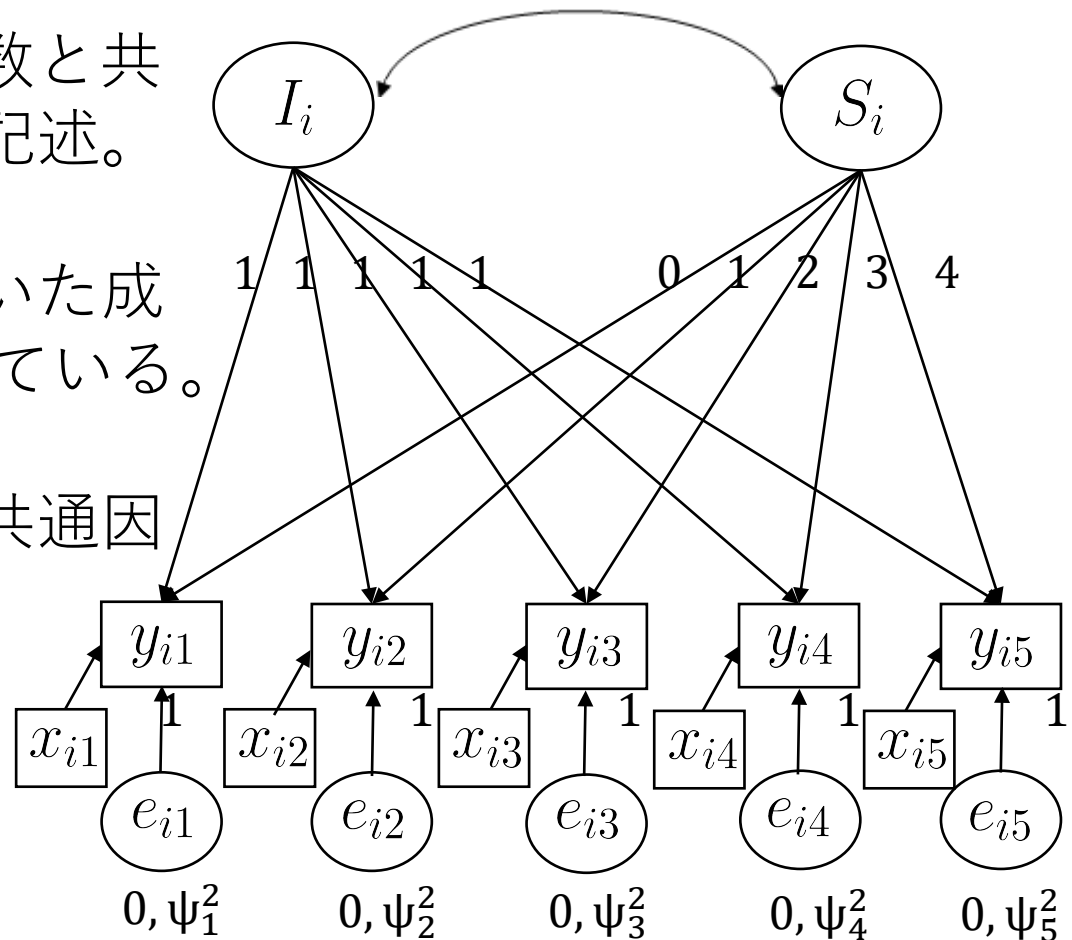
- 男子(=0)の切片因子得点の平均=493.22, 傾き因子得点の平均=-22.84。
- 女子(=1)の切片因子得点の平均=493.22-28.09=465.13, 傾き因子得点の平均=-22.84+4.47=-18.37。
- 性別だけでは説明できない因子得点の個人差 (=残差) もまだ多く残っている。



# 条件付LGM（時変的変数）

$$y_{it} = I_i + (t - 1)S_i + \beta x_{it} + e_{it}$$

- ・ 時变的 (time-varying) 変数と共通因子によって測定値を記述。
- ・ 時变的変数の影響を除いた成分の変化をLGMで表現している。
- ・ 各時点の時变的変数と共通因子間の相関を仮定する。

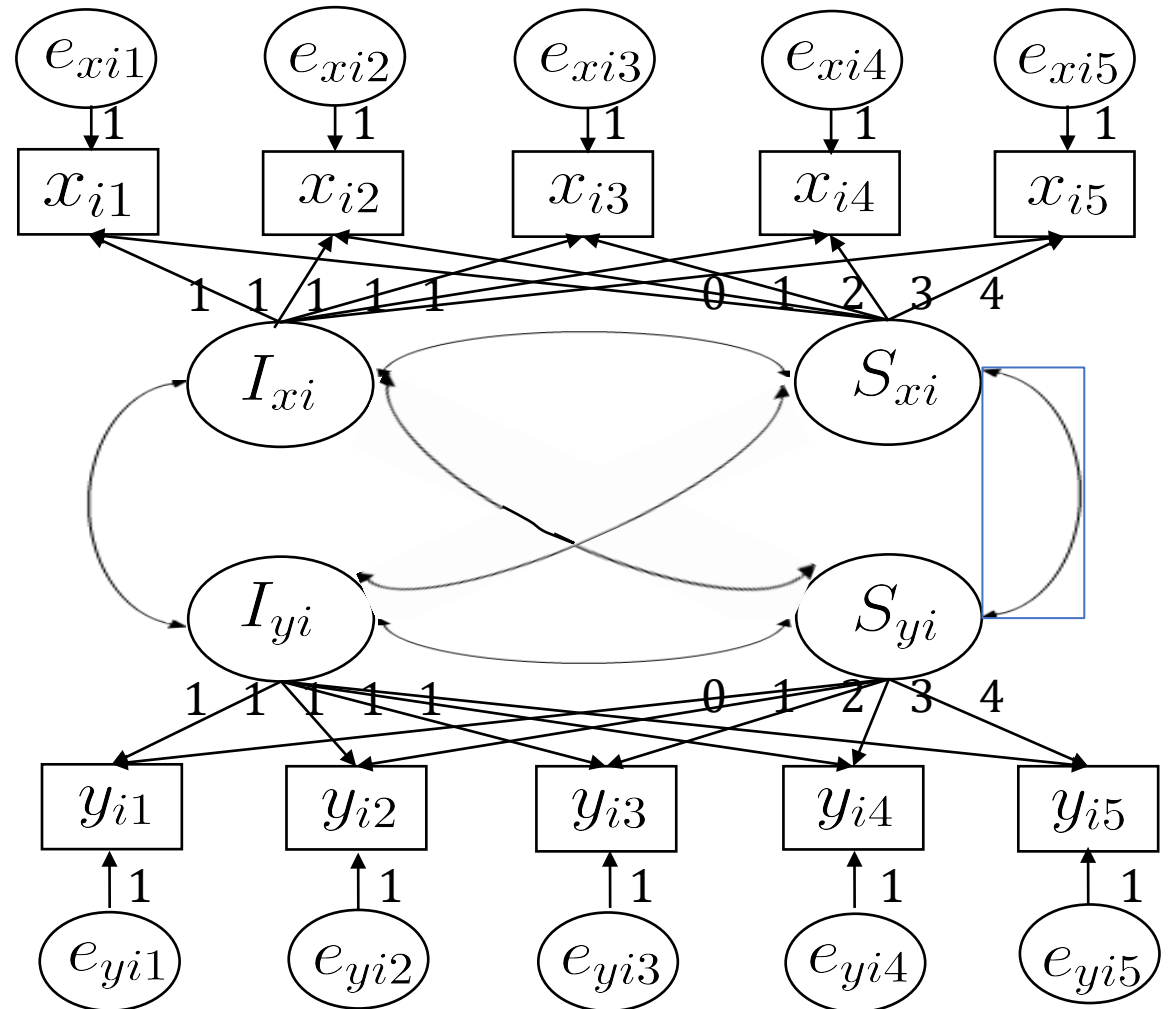


# 多変量LGM

・ 2複数の軌跡を記述すると同時にそれらの変化の間の相関関係を記述。

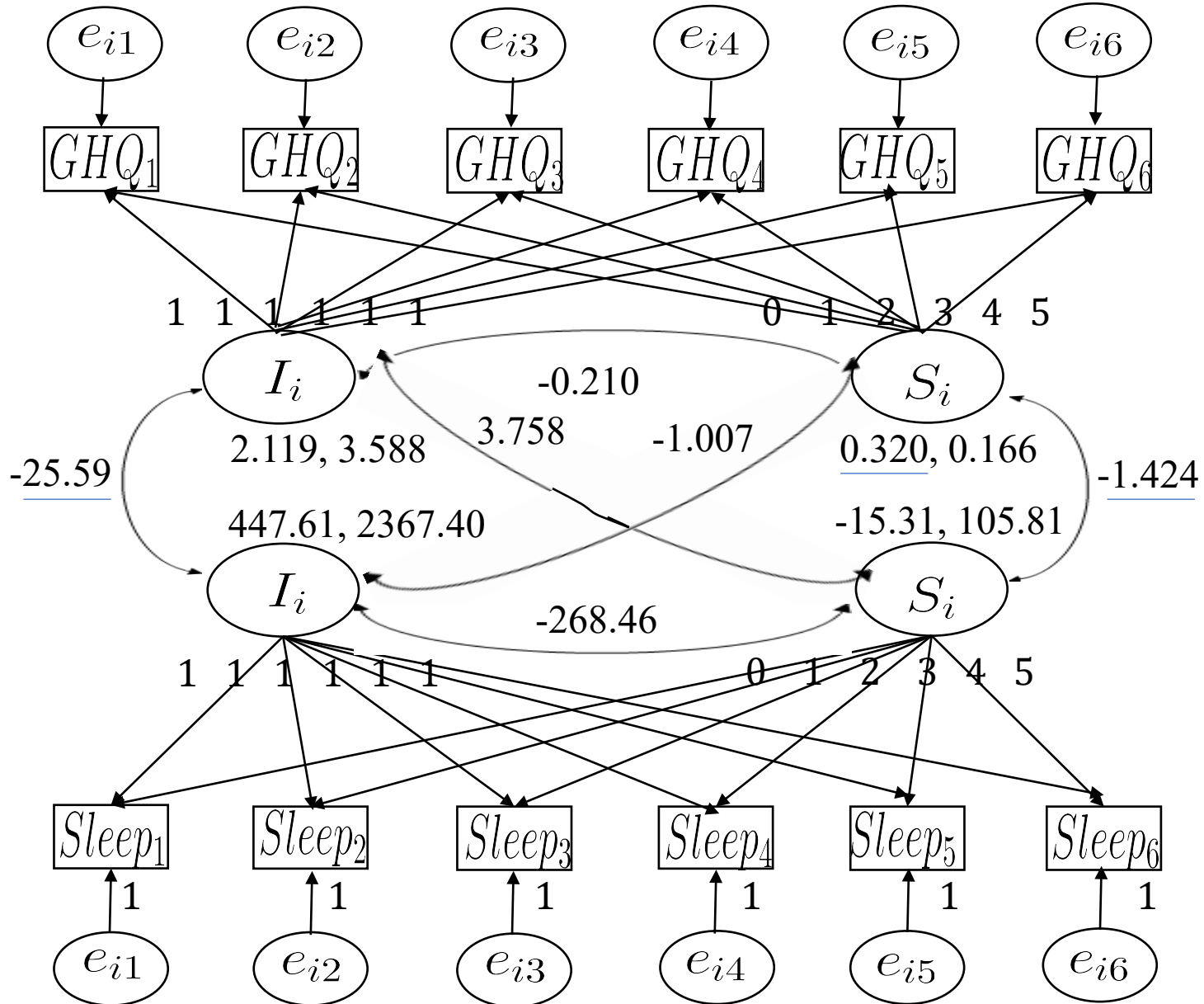
・ 特に、傾き因子間の共分散（相関）が主要な母数。

・ あくまで記述的なモデルであり、変化の間の因果関係を表すものではない。



\* 同一時点間の残差間に相関を仮定することもある。

# 分析例



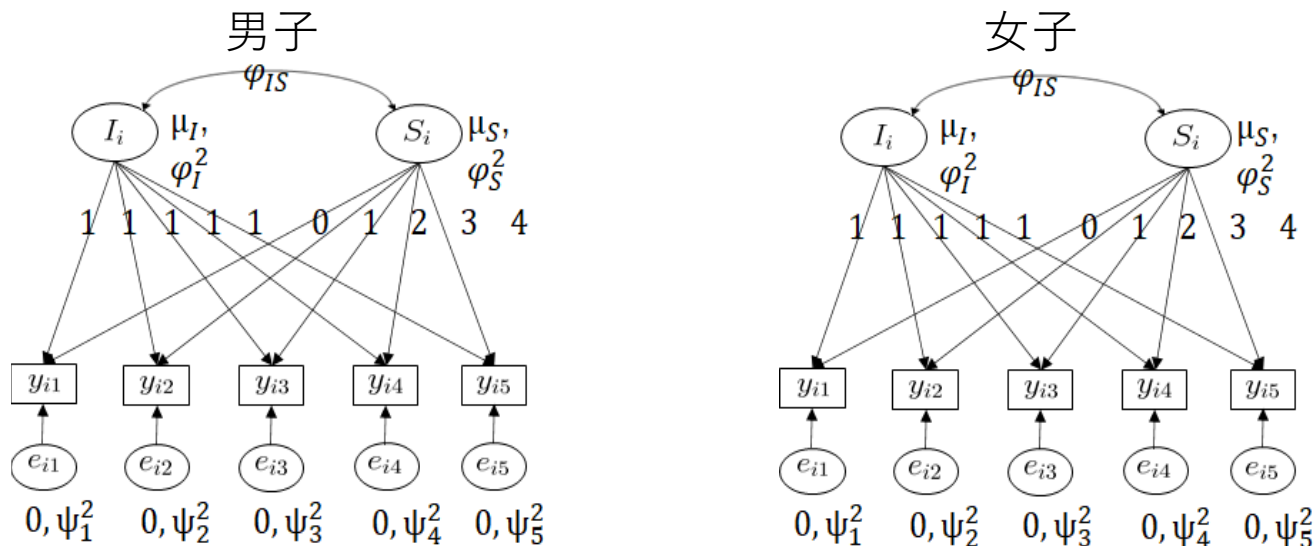
# 結果の解釈

- GHQのスコアの平均は学年を経るにつれて上昇する。
- 中1の時点で、睡眠時間が長い生徒ほど中1時の精神的健康度が良い（GHQスコアが低い）傾向にある。相関は-0.278。
- 睡眠時間の傾き因子得点が高い（＝長く寝る生徒）ほどGHQの傾き因子得点が低く、GHQスコアが高くなりにくい（＝精神的に健康）。相関は-0.340。

# 変化のパタンの分類（多群モデル）

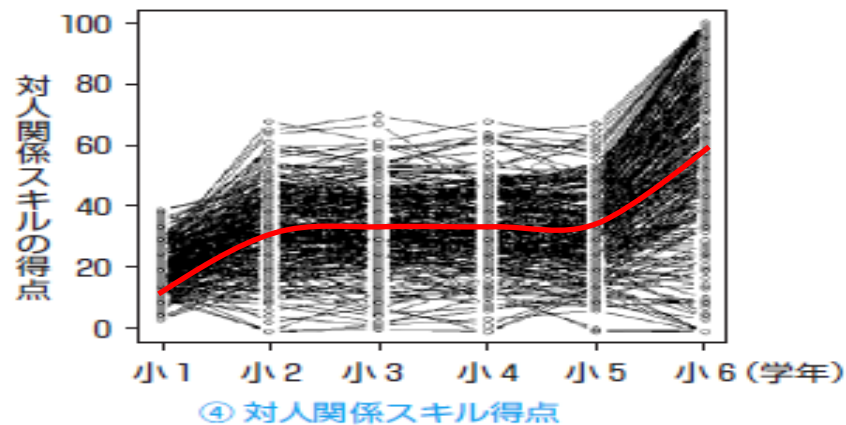
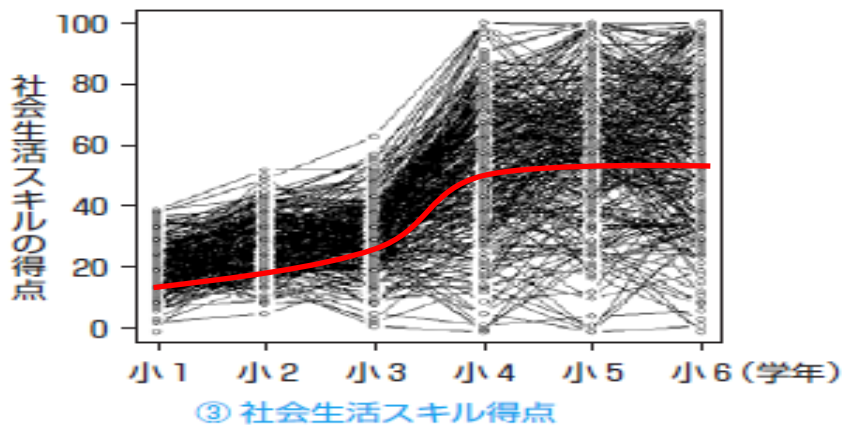
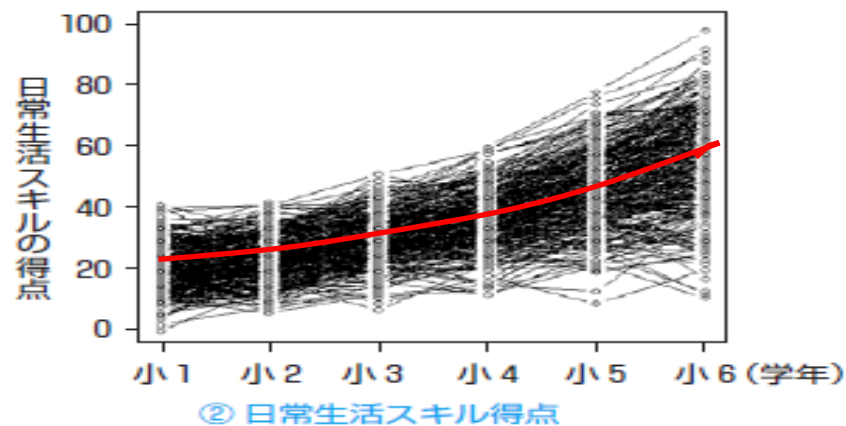
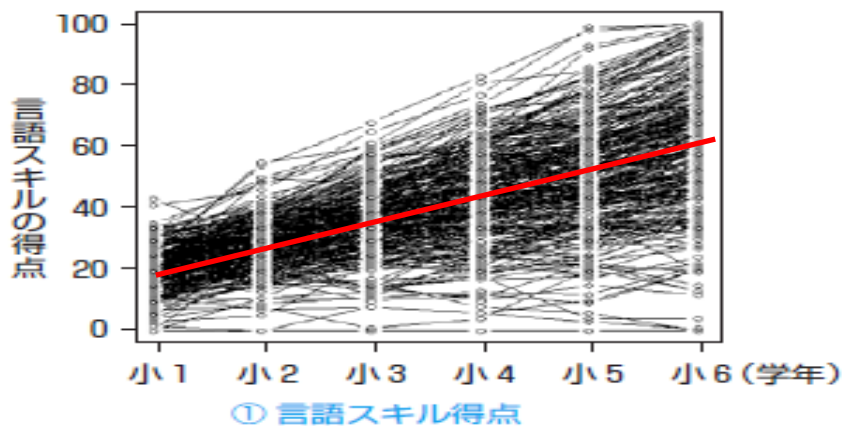
- 既知の群別にLGMを適用する。
- ただし、すべての母数が群間で異なると仮定するのではなく、因子平均・重み・因子（共）分散・残差分散のうちどの母数が異なるのかを段階的に調べてベストなモデル選択をする。

例：全ての母数が同じと仮定したモデル。





# そもそも、真の変化のパターンは線形？



宇佐美・荘島 (2015)

- 非線形な変化のパターンを表現するには？

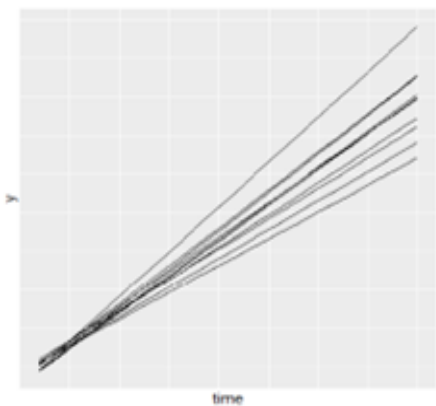


図 25 線形 LGM

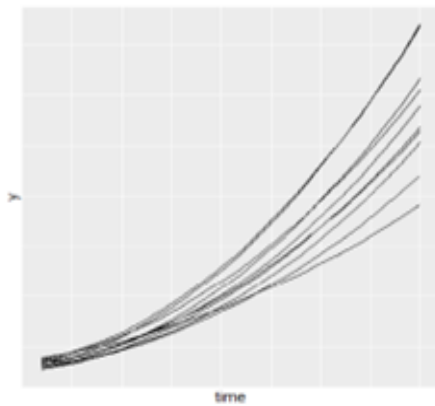


図 26 2次 LGM

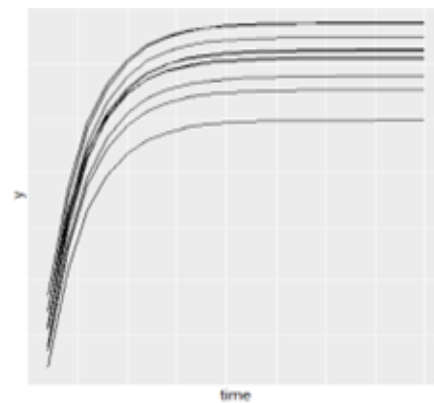


図 29 指数 LGM (加法)

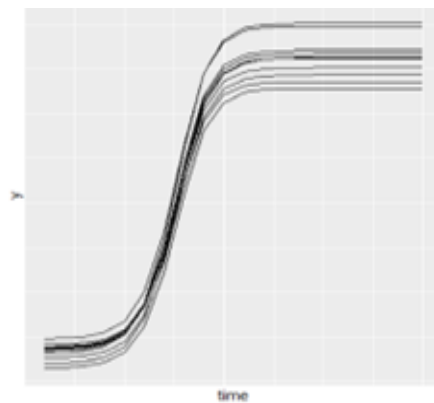


図 30 シグモイド LGM

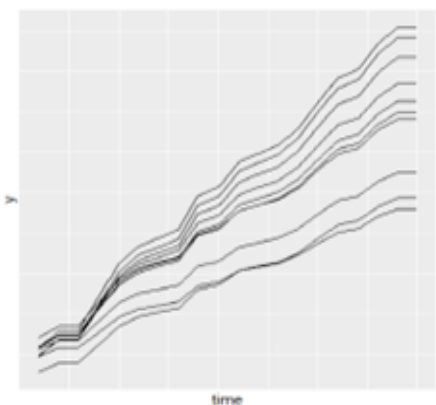


図 27 自由負荷 LGM

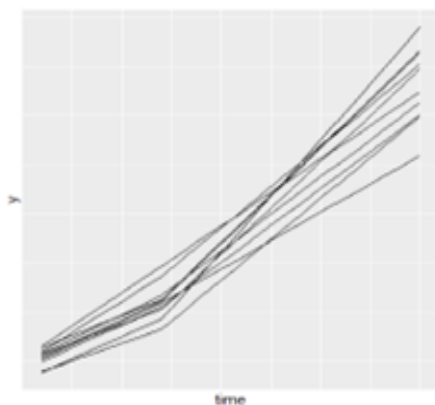


図 28 スプライン LGM

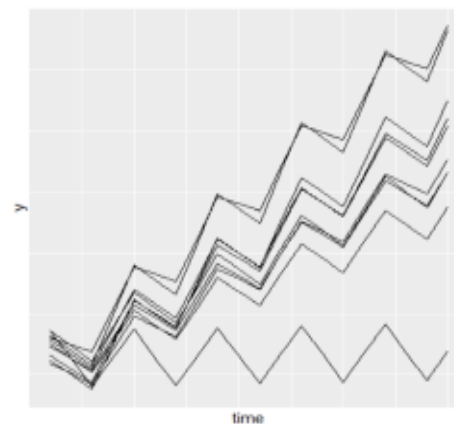


図 31 シンソイド LGM

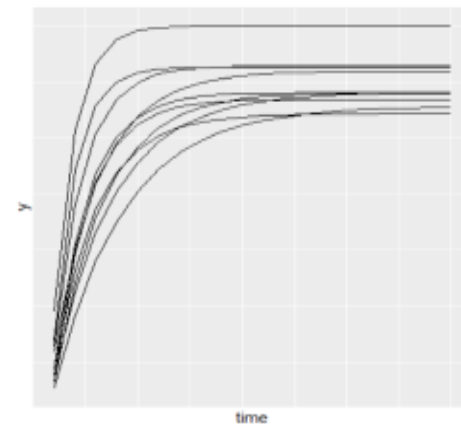
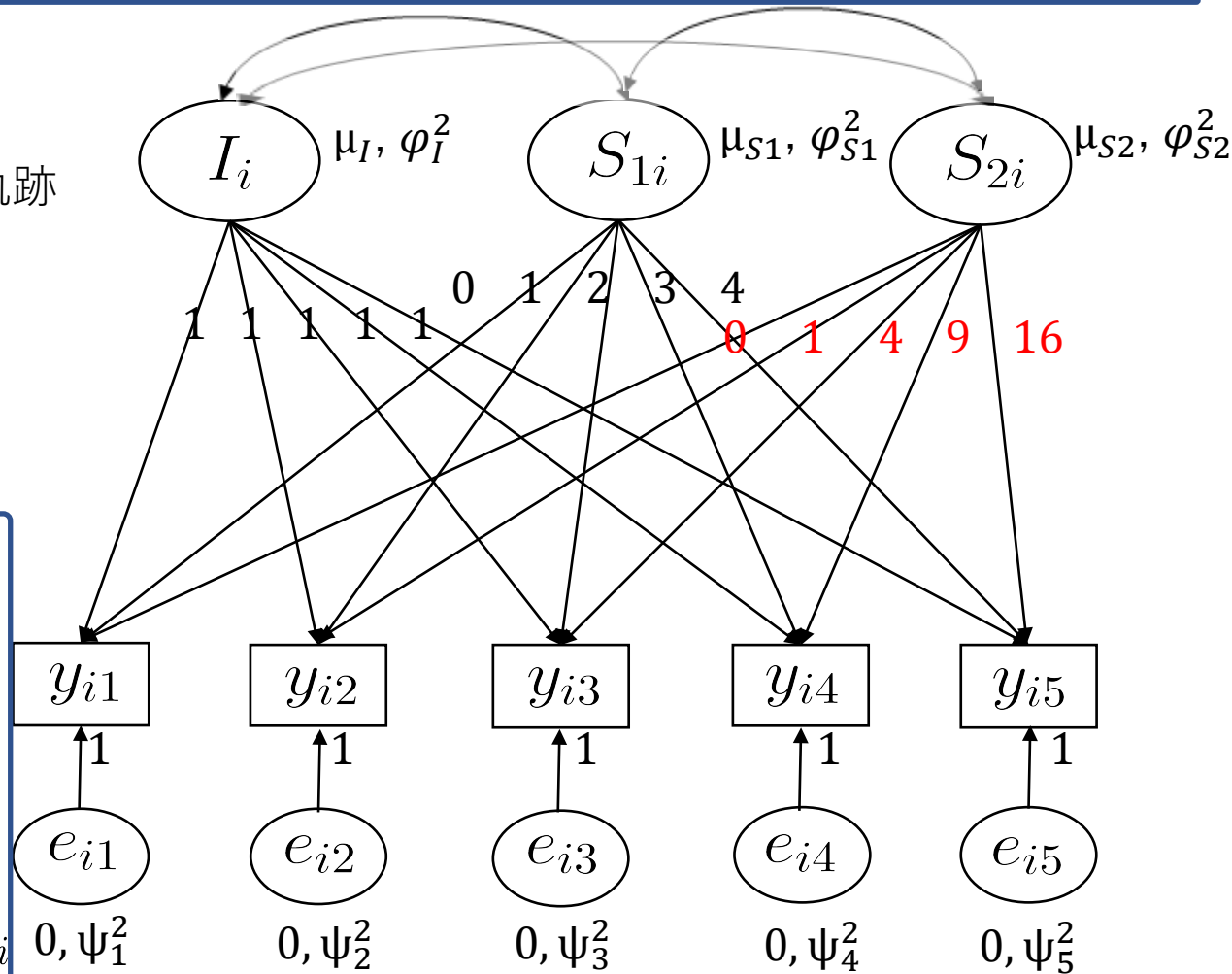
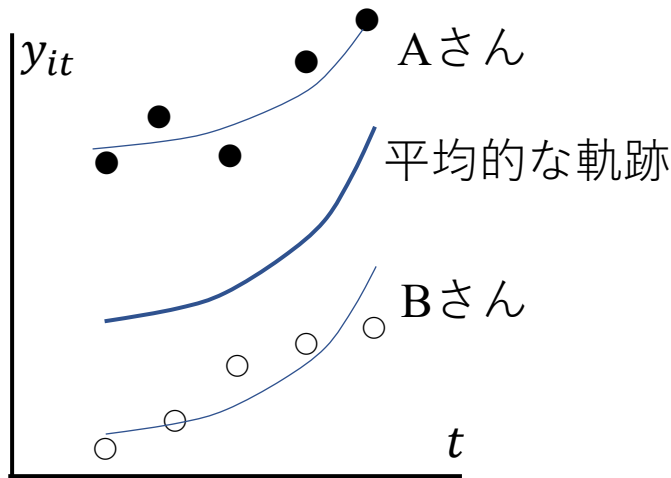


図 32 指数 LGM (乗法)

# 2次LGM (quadratic LGM)

$$y_{it} = I_i + w_{1t}S_{1i} + w_{2t}S_{2i} + e_{it} \quad (w_{1t} = t - 1, w_{2t} = (t - 1)^2)$$



$$f_{yi1} = I_i + 0 \times S_{1i} + 0 \times S_{2i}$$

$$f_{yi2} = I_i + 1 \times S_{1i} + 1 \times S_{2i}$$

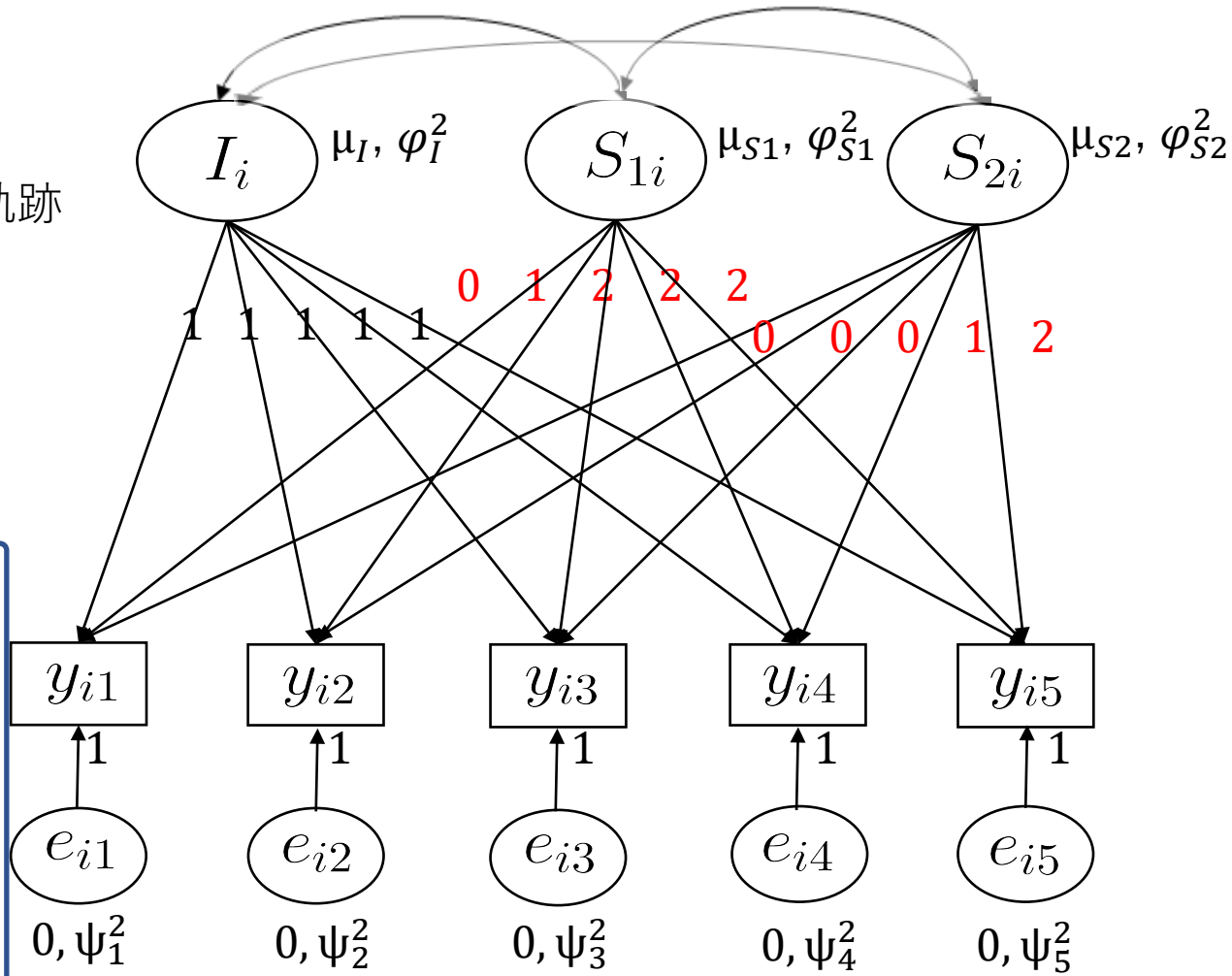
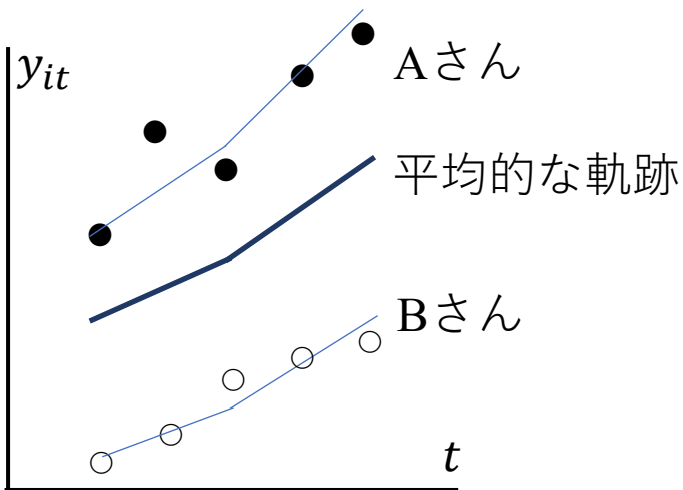
$$f_{yi3} = I_i + 2 \times S_{1i} + 4 \times S_{2i}$$

$$f_{yi4} = I_i + 3 \times S_{1i} + 9 \times S_{2i}$$

$$f_{yi5} = I_i + 4 \times S_{1i} + 16 \times S_{2i}$$

# スプライン (linear+linear) LGM

$$y_{it} = I_i + w_{1t}S_{1i} + w_{2t}S_{2i} + e_{it}$$



$$f_{y_{i1}} = I_i + 0 \times S_{1i} + 0 \times S_{2i}$$

$$f_{y_{i2}} = I_i + 1 \times S_{1i} + 0 \times S_{2i}$$

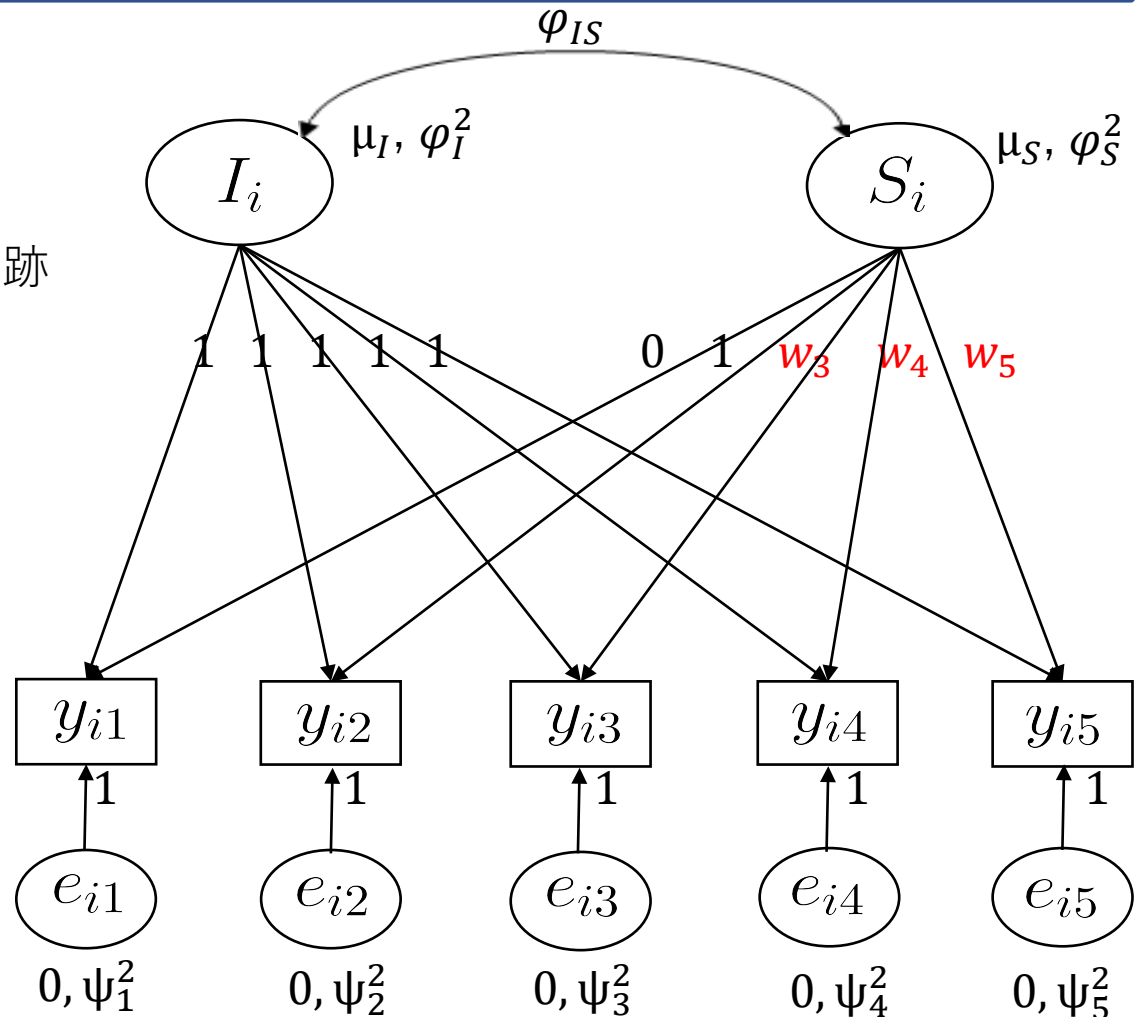
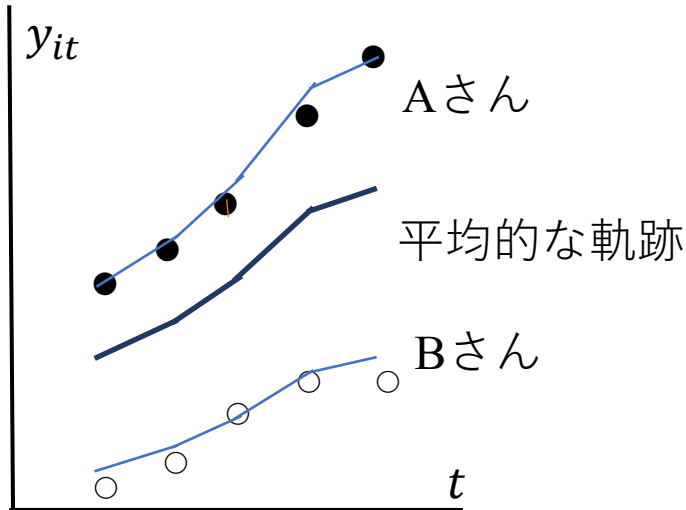
$$f_{y_{i3}} = I_i + 2 \times S_{1i} + 0 \times S_{2i}$$

$$f_{y_{i4}} = I_i + 2 \times S_{1i} + 1 \times S_{2i}$$

$$f_{y_{i5}} = I_i + 2 \times S_{1i} + 2 \times S_{2i}$$

# 自由負荷LGM

$$y_{it} = I_i + w_t S_i + e_{it} \quad (w_1 = 0, w_2 = 1)$$



$$f_{yi1} = I_i + 0 \times S_i$$

$$f_{yi2} = I_i + 1 \times S_i$$

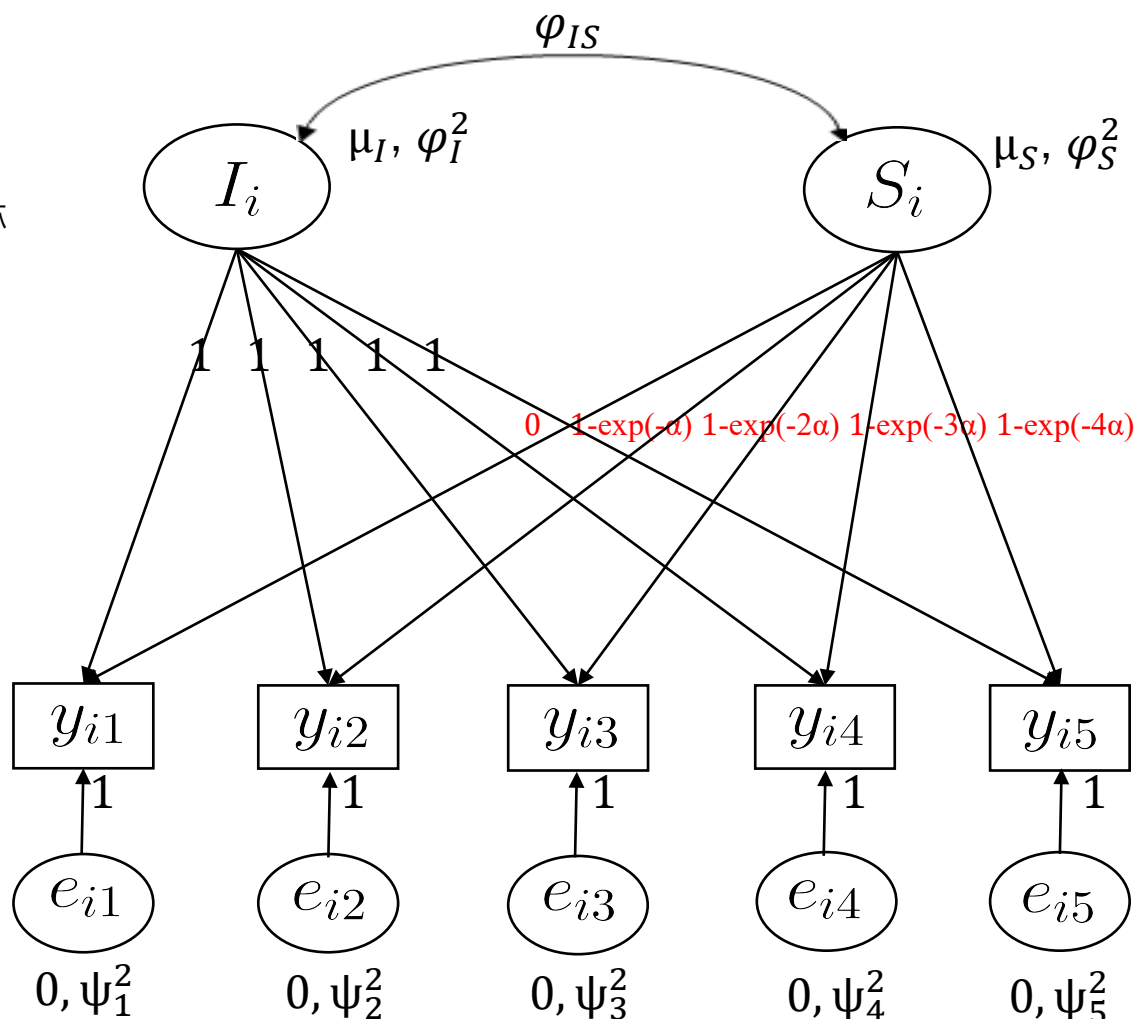
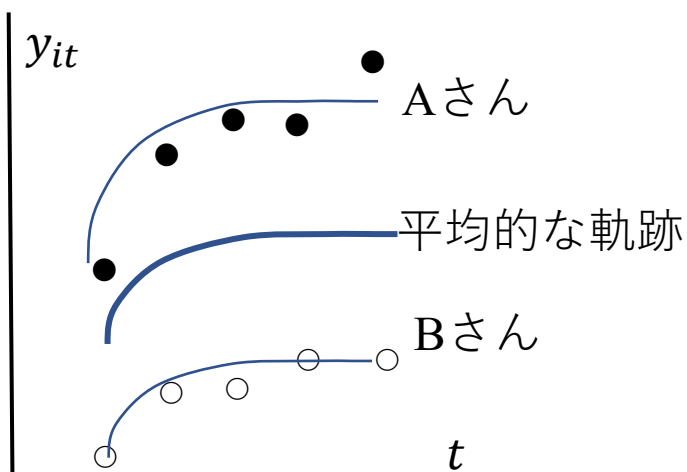
$$f_{yi3} = I_i + w_3 \times S_i$$

$$f_{yi4} = I_i + w_4 \times S_i$$

$$f_{yi5} = I_i + w_5 \times S_i$$

# 指数LGM (加法モデル)

$$y_{it} = I_i + [1 - \exp(-\alpha \times (t - 1))]S_i + e_{it}$$



$$f_{yi1} = I_i + 0 \times S_i$$

$$f_{yi2} = I_i + [1 - \exp(-\alpha)] \times S_i$$

$$f_{yi3} = I_i + [1 - \exp(-2\alpha)] \times S_i$$

$$f_{yi4} = I_i + [1 - \exp(-3\alpha)] \times S_i$$

$$f_{yi5} = I_i + [1 - \exp(-4\alpha)] \times S_i$$

\*母数の非線形制約(nonlinear constraints)が必要。

# 補足（1）

## 2次LGM

- ・ 2次の傾き因子( $S_2$ )は、「時点間の変化量の変化」を反映する量。
- ・ 「1,4,9,16,25...」の（時点1を起点とした）表現以外にも、例えば「4,1,0,1,4...」のような（時点3を起点とした）表現も可能。
- ・ 母数の識別のためには4時点以上のデータが必要。

## スプラインLGM

- ・ linear+quadraticのような組み合わせも可。
- ・ linear+linearのモデルの場合、識別性のために5時点以上のデータが必要。

## 補足（2）

### 自由負荷LGM

- $w_3$ は、時点1から時点2の変化量に比べて、時点1から時点3の変化量が**何倍**であるかを表す。他の重みについても同様。
- 3時点以上の時点数が識別のために必要。
- $w_1$ と $w_2$ でなく、 $w_1$ と $w_T$ を固定する場合もある（各重みの解釈は、時点1から時点Tの変化量に対する**割合**）。当てはまりは同じ。
- ただし、不適解(e.g., 分散が負の推定値)が出やすい傾向。

### 指数LGM

- 傾き因子は $t \rightarrow \infty$ のときの漸近的な変化量の大きさを表す。
- 3時点以上の時点数が識別のために必要。



# モデルの適合度とモデル選択

表 18 抑うつデータ ( $N = 944$ ,  $T = 5$ )

ID	Dep0	Dep1	Dep3	Dep6	Dep12
1	6	3	3	4	5
2	0	0	1	0	0
3	4	10	6	6	8
4	1	0	0	0	0
5	8	1	4	6	9
6	2	1	0	2	1
...	...	...	...	...	...
944	5	4	8	10	7

表 19 抑うつデータにおける各 LGM の適合度

	線形	2次	自由負荷	スプライン*
$T_{ML}$	252.692	135.967	10.762	239.292
$df$	10	6	7	6
$p$	0.000	0.000	0.149	0.000
CFI	0.818	0.902	0.997	0.825
LL	-10311.274	-10252.911	-10190.309	-10304.574
AIC	20642.548	20533.822	20406.617	20637.147
BIC	20691.049	20601.724	20469.669	20705.049
RMSEA	0.160	0.151	0.024	0.203
	[0.144, 0.178]	[0.130, 0.174]	[0.000, 0.050]	[0.181, 0.225]
SRMR	0.111	0.069	0.019	0.105

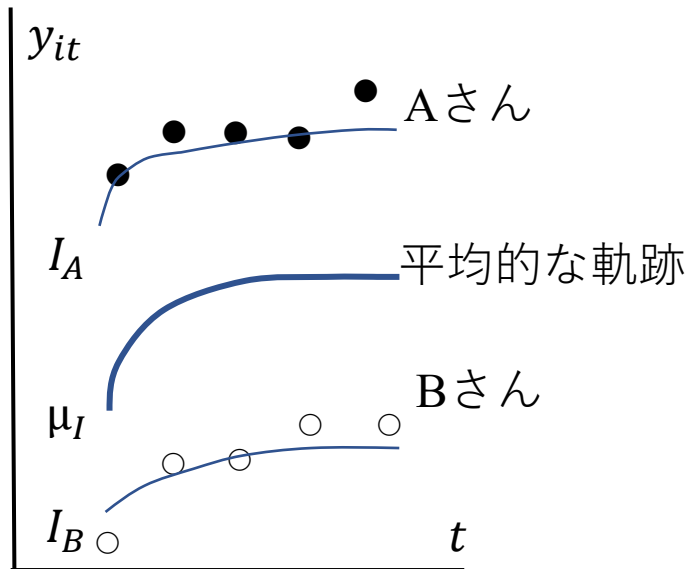
\* スプライン LGM では、一部の分散の推定値が負になる不適解が生じたが、ここでは参考として適合度の結果を記載している。

AIC: Akaike Information Criterion; BIC: Bayesian Information Criterion CFI: Comparative Fit Index; RMSEA: root mean square error of approximation; SRMR: Standardized Root Mean Squared Residual

- 分析目的（e.g., 記述or予測）やモデルの適合度・情報量規準、先行研究の知見などを踏まえモデル選択をしていく。
- 適合度指標の研究は多いが、CFI、RMSEA、SRMRの報告が推奨されている(Kline, 2016)。 残差相関の検討も重要。
- 当てはまりの悪いモデルや過度に複雑なモデルは不適解（負の残差分散や因子間共分散行列の非正定値）のリスクが高い。
- 不適解の対処として、異なる仮定に基づくモデル（e.g., 傾き因子分散0の制約[ランダム切片]や誤差分散の等値制約）を試すことや、事前分布を仮定したベイズ推測を行うことが挙げられる。
- blavaan (Merkle & Rosseel, 2018)によるSEMのベイズ推測も実行可能。
- 更なる分析例はBollen & Curran (2006), Grimm et al (2016)を参照。

# 指数LGM（乗法）

$$y_{it} = I_i + [1 - \exp(-\alpha_i \times (t - 1))]S_i + e_{it}$$



- ・  $\alpha$ の大きさが個人に依存する。  
→個人によって上限に達する速度が異なる。  
→その平均と分散を推定。  
→多くの時点数が必要。

乗法モデルの共分散構造は複雑になり、通常の共分散構造分析（CSA）で扱うことが難しい。そのためRのnlmeパッケージなど、非線形混合効果モデルの推定（線形近似）を実行できるソフトウェアが必要。

- ・ 特に変量効果を仮定する母数が増えるほど不適解や非収束のリスクが生じ、計算時間も長くなる。ベイズ推定も利用可能。

# アウトライン

- 導入
- 潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング
- 交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測
- 強縦断データと動学的SEM
- 軌跡の分類と潜在成長混合モデリング
- 欠測データの処理

# 様々な「関係」

- ・ 集団間の相関関係 **group-level relation**

xが大きい人ほど、yも大きい→交絡が起こりうる。

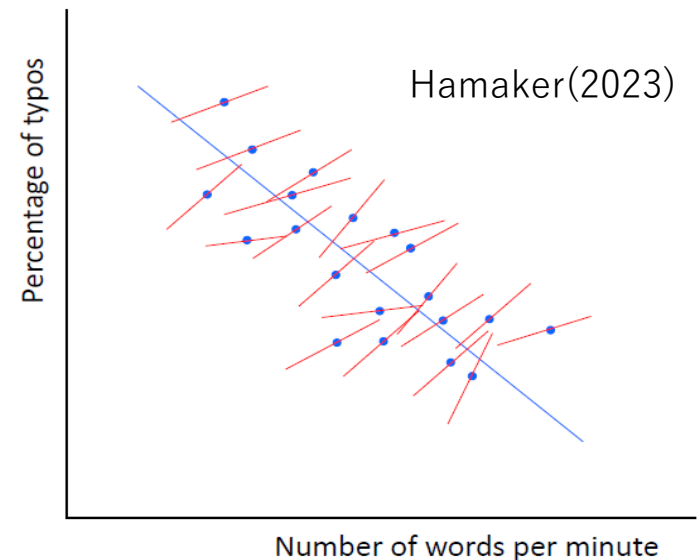
- ・ 個人内（の共変）関係 **within-person relation**

（ある人について）xが大きくなるとyも大きくなる→交絡が起こりうる。

- ・ 因果関係 **causal relation (causality)**

xが大きくなるからyも大きくなる。

- ・ 本資料では集団間の相関関係と個人内（の共変）関係に特に焦点をあてる。



# 変数間の関係を調べる

## 横断データの場合

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_{it}$$

$y_i$  : 従属変数  $x_i$  : 独立変数  $e_i$  : 残差

- 交絡変数 $l$ があるときの対処

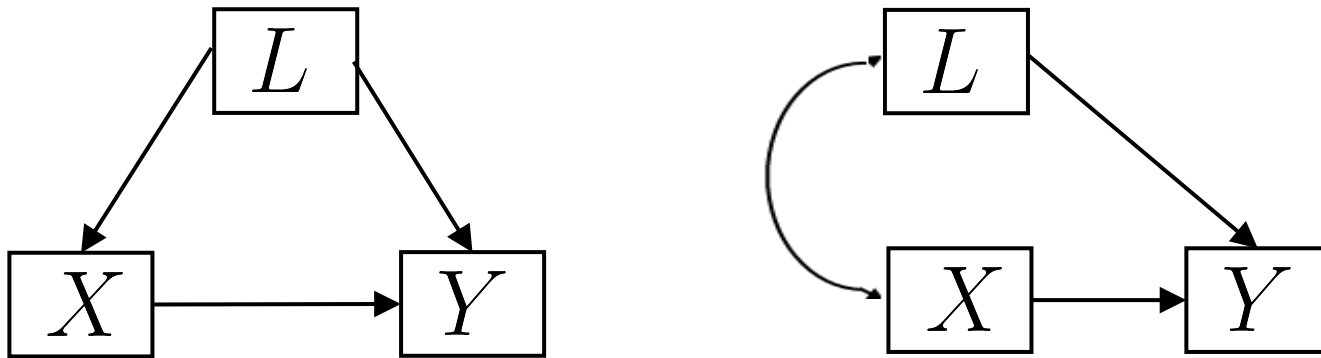
$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma l_i + e_{it}$$

$l$ の影響を除いても、 $x$ 独自の効果があるか？

例：喫煙頻度( $x$ )と健康( $y$ )の関係は、普段の運動習慣や年齢( $l$ )の影響を除いても見られるか？

# 交絡変数(confounder)

- 例えば、従属変数 $y$ と独立変数 $x$ の双方に影響を与える（または、 $x$ については相関する）変数。



# 縦断デザイン（結果変数が一つ）の場合

## 縦断データの場合

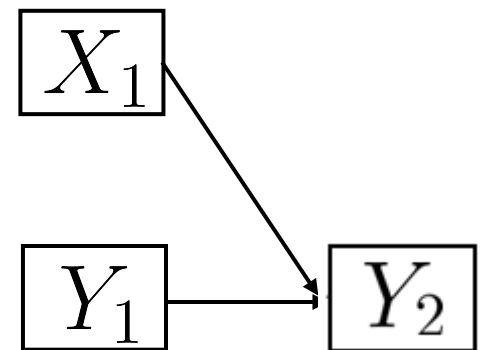
$$y_{i2} = \alpha + \beta x_{i1} + \gamma y_{i1} + e_{it}$$

一時点前の自分自身の変数 $y_1$ （自己回帰項）が主要な交絡変数（過去の変数が現在に影響を与えているという動的プロセスの仮定）。

- （ $y$ 以外の）交絡変数 $l$ がある場合の回帰モデル

$$y_{i2} = \alpha + \beta x_{i1} + \gamma y_{i1} + \eta l_{i1} + e_{it}$$

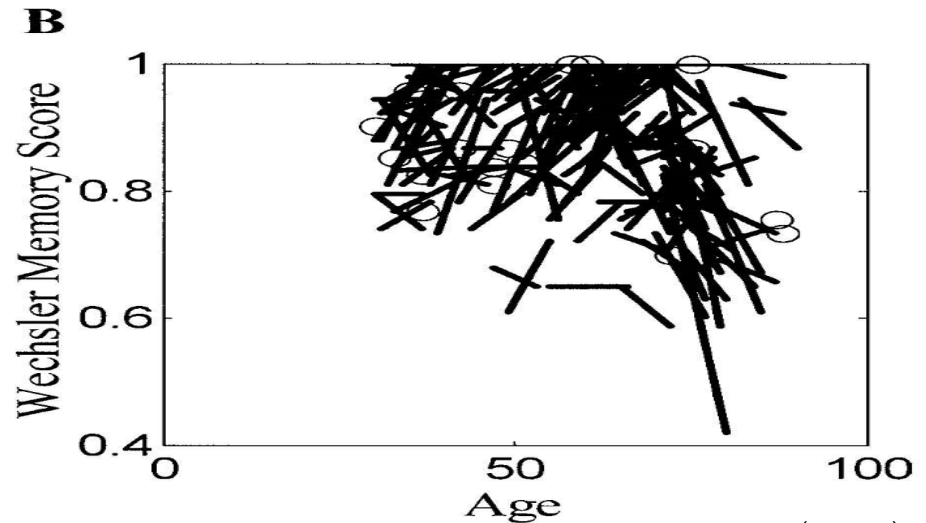
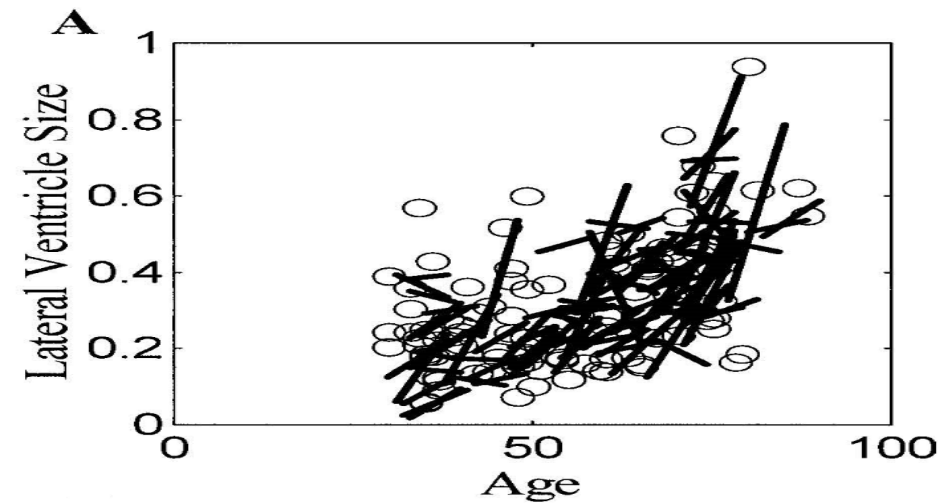
自己回帰項の投入による個人内関係・因果関係への接近→縦断デザインのメリットの1つ。





# 相互関係についての説明的研究

- 心理学でよく見られる説明的研究のタイプに、時変的な二変数（または多変数）間どうしの関係である**相互関係**（reciprocal relation）についての推測がある。
- 例えば、睡眠習慣の改善が精神的健康に影響を与えるのか、逆に精神的健康の改善が睡眠習慣に影響を与えるのか、あるいは両方か。
- この推測を目的として主に1990年代から現在まで心理学を中心に広く使われてきた統計モデルが**交差遅延パネルモデル**（cross-lagged panel model: CLPM）。  
→**構造方程式モデリング（SEM）** / **共分散構造分析(CSA)**による推定。

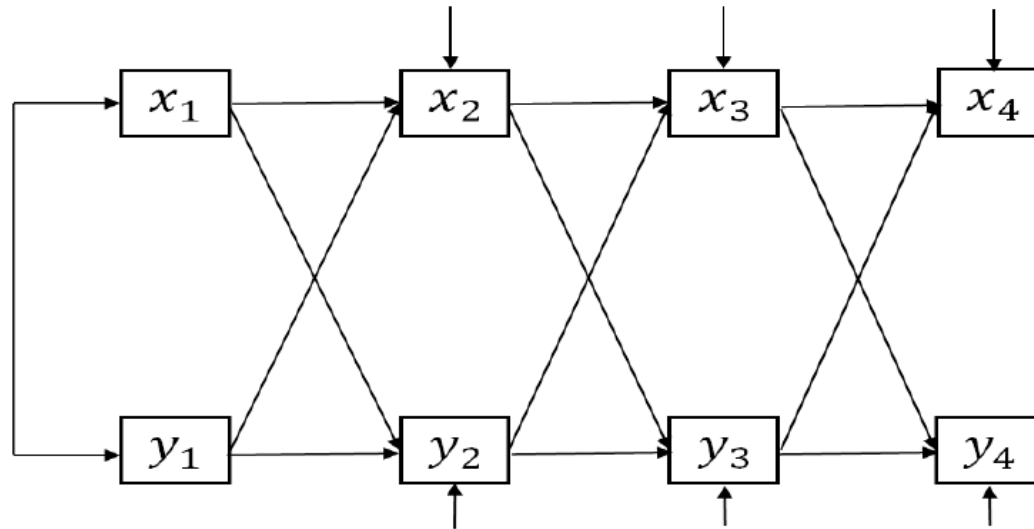


McArdle (2009)

・相互関係の推測を目的とした教育学、心理学、医学系の縦断研究では、典型的にサンプルサイズ $N$ は比較的大きく( $\geq 100$ )、**時点数 $T$** は小さい(e.g.,  $T=2,3,4$ )。

# CLPMの表現

$$y_{it} = \alpha_{yt} + \beta_{yt}y_{i(t-1)} + \gamma_{yt}x_{i(t-1)} + d_{yit}$$
$$x_{it} = \alpha_{xt} + \beta_{xt}x_{i(t-1)} + \gamma_{xt}y_{i(t-1)} + d_{xit}$$



$\alpha$  : 切片     $\beta$  : 自己回帰係数     $\gamma$  : 交差遅延係数     $d$  : 残差

- 2つの交差遅延係数を通して相互関係が推定される。



表 38 児童生徒の睡眠時間、抑うつ症状、就寝時間データ (10,12,14,16 歳  
時:  $T = 4$ )

ID	$x_1$	$y_1$	$l_1$	$x_2$	$y_2$	$l_2$	$x_3$	$y_3$	$l_3$	$x_4$	$y_4$	$l_4$
1	9.0	7	21.5	8.5	0	22.0	6.5	0	24.5	6.0	0	25.5
2	9.5	8	21.5	9.0	10	22.0	9.5	1	22.0	7.5	12	24.0
3	9.0	1	22.0	9.0	1	21.5	9.0	9	22.0	6.5	2	23.5
4	8.5	7	22.5	7.0	0	23.5	6.0	0	24.0	7.5	1	23.0
5	9.5	4	21.0	8.5	6	22.0	7.0	5	23.5	8.0	0	22.5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1294	9.5	1	21.0	9.5	0	21.0	8.0	1	23.0	7.0	0	25.0

\*  $x$ : 睡眠時間 (単位: 時間)、 $y$ : Short Mood and Feelings Questionnaire (SMFQ) スコア  
(単位: 点)、 $l$ : 就寝時間 (単位: 時)

表 40 睡眠時間データの分析結果 (交差遅延パネルモデル)

	Est.	se		Est	se
$T_{ML}$	74.614		$\alpha_{x2}$	3.541	0.254
$df$	12		$\alpha_{x3}$	2.866	0.248
$p$	0		$\alpha_{x4}$	3.750	0.210
CFI	0.960		$\beta_{x2}$	0.541	0.028
LL	-19527.754		$\beta_{x3}$	0.560	0.029
AIC	39119.507		$\beta_{x4}$	0.423	0.027
BIC	39284.803		$\gamma_{x2}$	0.008	0.005
RMSEA	0.064 [0.050,0.078]		$\gamma_{x3}$	0.008	0.006
SRMR	0.036		$\gamma_{x4}$	0.004	0.006
$\alpha_{y2}^*$	1.929	1.270	$\omega_{x2}^2$	0.407	0.016
$\alpha_{y3}^*$	5.723	1.115	$\omega_{x3}^2$	0.575	0.023
$\alpha_{y4}^*$	4.795	0.976	$\omega_{x4}^2$	0.694	0.027
$\beta_{y2}^*$	0.384	0.023	$\omega_{xy2}$	-0.058	0.057
$\beta_{y3}^*$	0.329	0.027	$\omega_{xy3}$	-0.152	0.072
$\beta_{y4}^*$	0.444	0.030	$\omega_{xy4}$	-0.115	0.090
$\gamma_{y2}^*$	0.023	0.140	$\sigma_{x1}^{*2}$	0.401	0.016
$\gamma_{y3}^*$	-0.391	0.131	$\sigma_{y1}^{*2}$	15.344	0.603
$\gamma_{y4}^*$	-0.284	0.125	$\sigma_{xy1}^*$	0.061	0.069
$\omega_{y2}^{*2}$	10.218	0.402			
$\omega_{y3}^{*2}$	11.645	0.458			
$\omega_{y4}^{*2}$	14.955	0.588			

- ・ 交差遅延係数 $\gamma$ について、SMFQ ( $y$ ) の回帰式では、14 歳および16 歳時点の回帰式 (i.e.,  $\gamma y_3$ ,  $\gamma y_4$ ) においてそれぞれ統計的に有意。

- ・ 16 歳の回帰式に着目すると、14歳時のSMFQ は同じ水準でも、14 歳時の睡眠時間が長い生徒ほど、16 歳時のSMFQ のスコアが低い傾向。

- ・ 一方、睡眠時間 ( $x$ ) の回帰式では、いずれの時点においても交差遅延係数の推定結果は有意でなかった。

# 心理学研究で起きていること

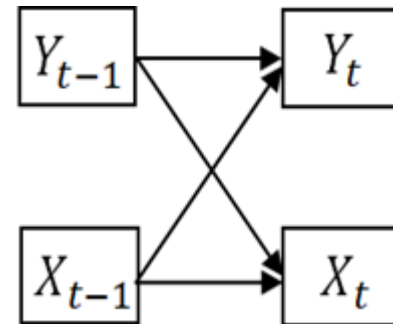
- 変数間の相互関係への関心は高い。

RQ: 過去のある変数( $X_{t-1}$ )が大きいほど将来の別の変数 ( $Y_t$ )も大きいか？逆の関係 ( $Y_{t-1} \rightarrow X_t$ ) は？

⇒自己回帰項の投入が重要.

- 一方で、個人内関係と個人差（個人間関係）を分離して個人内関係を見ることへの関心も強い。

RQ:ある個人において、過去のある変数( $X_{t-1}$ )が（普段より）大きくなると、その個人における将来の別の変数 ( $Y_t$ )も大きくなるか？逆の関係は？





# CLPMへの批判(Hamaker et al., 2015)

Psychological Methods  
2015, Vol. 20, No. 1, 102–116

© 2015 American Psychological Association  
1082-989X/15/\$12.00 <http://dx.doi.org/10.1037/a0038889>

## A Critique of the Cross-Lagged Panel Model

Ellen L. Hamaker and Rebecca M. Kuiper  
Utrecht University

Raoul P. P. P. Grasman  
University of Amsterdam

The cross-lagged panel model (CLPM) is believed by many to overcome the problems associated with the use of cross-lagged correlations as a way to study causal influences in longitudinal panel data. The current article, however, shows that if stability of constructs is to some extent of a trait-like, time-invariant nature, the autoregressive relationships of the CLPM fail to adequately account for this. As a result, the lagged parameters that are obtained with the CLPM do not represent the actual within-person relationships over time, and this may lead to erroneous conclusions regarding the *presence*, *predominance*, and *sign* of causal influences. In this article we present an alternative model that separates the within-person process from stable between-person differences through the inclusion of random intercepts, and we discuss how this model is related to existing structural equation models that include cross-lagged relationships. We derive the analytical relationship between the cross-lagged parameters from the CLPM and the alternative model, and use simulations to demonstrate the spurious results that may arise when using the CLPM to analyze data that include stable, trait-like individual differences. We also present a modeling strategy to avoid this pitfall and illustrate this using an empirical data set. The implications for both existing and future cross-lagged panel research are discussed.

*Keywords:* cross-lagged panel, reciprocal effects, longitudinal model, trait–state models, within-person dynamics

・ CLPMの交差遅延係数は、個人内プロセスと個人間差が混在しており、純粋な個人内関係を正しく評価できないと批判。

→自己回帰項の統制だけでは個人内関係を捕捉する上で不十分。

→一つの対処法として**random-intercept CLPM (RI-CLPM)**を提案。

# CLPMへの批判(Hamaker et al., 2015)

- ・ 2024年1月現在でこの論文の引用数は2500回以上。
- ・ CLPMとRI-CLPMの数理的な違いは僅かであるが、相互関係の方向性（e.g.,  $X \Rightarrow Y$ か $Y \Rightarrow X$ か）や効果の大きさ、符号等の推測結果がしばしば大きく異なる。
- ・ RI-CLPMを含めた分析結果の比較や二次分析の試みも増加（e.g., Usami, Todo et al., 2019; Orth, Clark, Donnellan, & Robins, 2021）。
- ・ 国内の心理学や周辺領域でも、個人内の相互関係の推測を意図したRI-CLPMの適用事例が増えてきた。
- ・ 一方向の関係（e.g.,  $X \Rightarrow Y$ ）を調べるときに比較的広く利用される固定効果モデル・変量効果モデルでも、個人差を表す潜在変数が含まれる（本資料では省略）。

# RI-CLPM (Hamaker et al., 2015)

$$\begin{aligned} y_{it} &= \mu_{yt} + I_{yi} + y_{it}^* & y_{it}^* &= \beta_{yt}y_{i(t-1)}^* + \gamma_{yt}x_{i(t-1)}^* + d_{yit} \\ x_{it} &= \mu_{xt} + I_{xi} + x_{it}^* & x_{it}^* &= \beta_{xt}x_{i(t-1)}^* + \gamma_{xt}y_{i(t-1)}^* + d_{xit} \end{aligned}$$

$\mu_{yt}, \mu_{xt}$ : 各時点 $t$ の集団平均

$I_{yi}, I_{xi}$ : 個人 $i$ の特性因子（個人差を表す量） $E(I_{yi}) = E(I_{xi}) = 0$

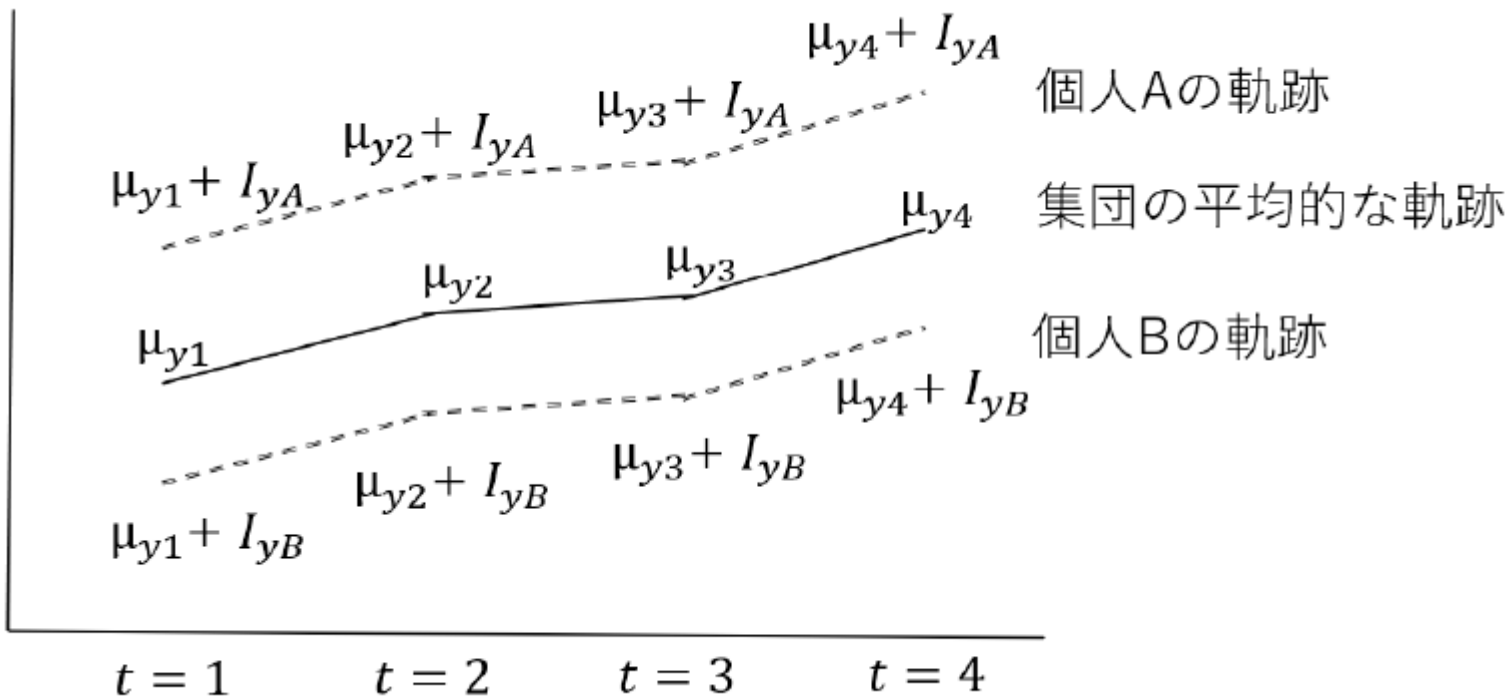
$x_{it}^*, y_{it}^*$ : 個人 $i$ の期待値（ $\mu_{yt} + I_{yi}, \mu_{xt} + I_{xi}$ ）からの偏差

⇒  $x_{it}^*, y_{it}^*$  は個人内変動を表す量と考えられる。

・ 特性因子は安定した個人差を表す量と解釈され、そのモデルの設計思想から、個人内変動とは無相関と仮定される：

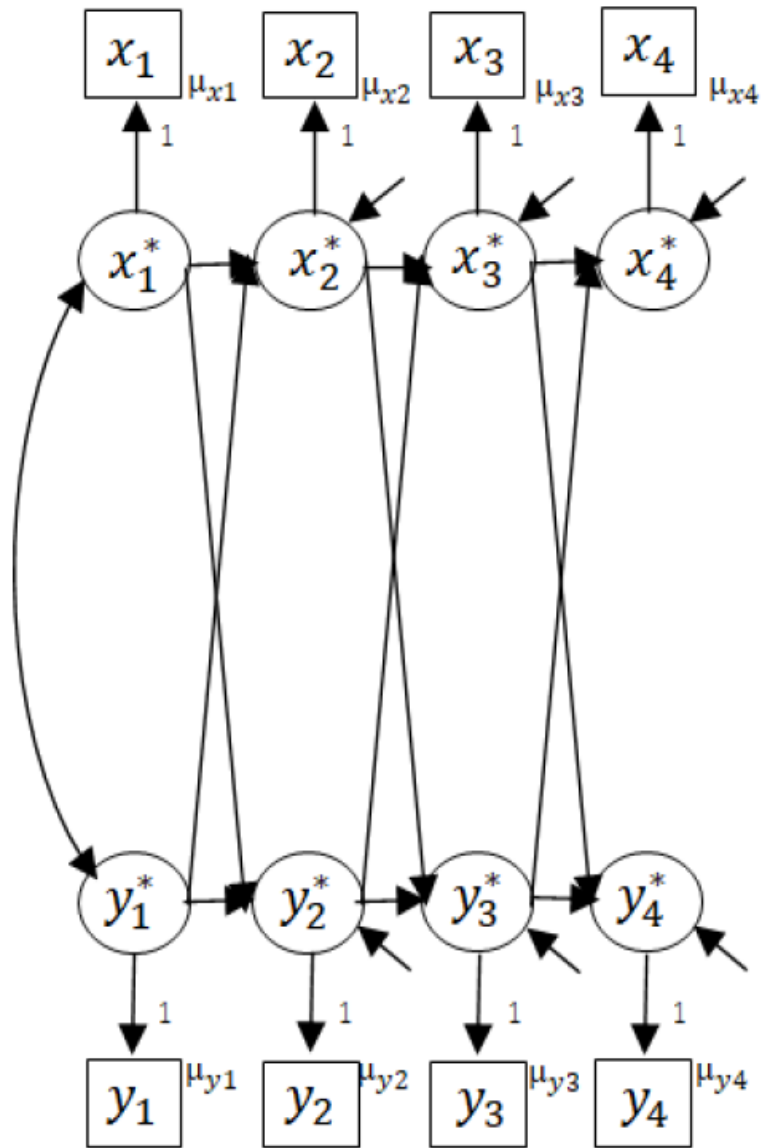
$$\text{cov}(I_{yi}, y_{it}^*) = \text{cov}(I_{yi}, x_{it}^*) = \text{cov}(I_{xi}, y_{it}^*) = \text{cov}(I_{xi}, x_{it}^*) = 0$$

観測値の分散 = 個人間（特性因子）分散 + 個人内変動分散、の直交分割

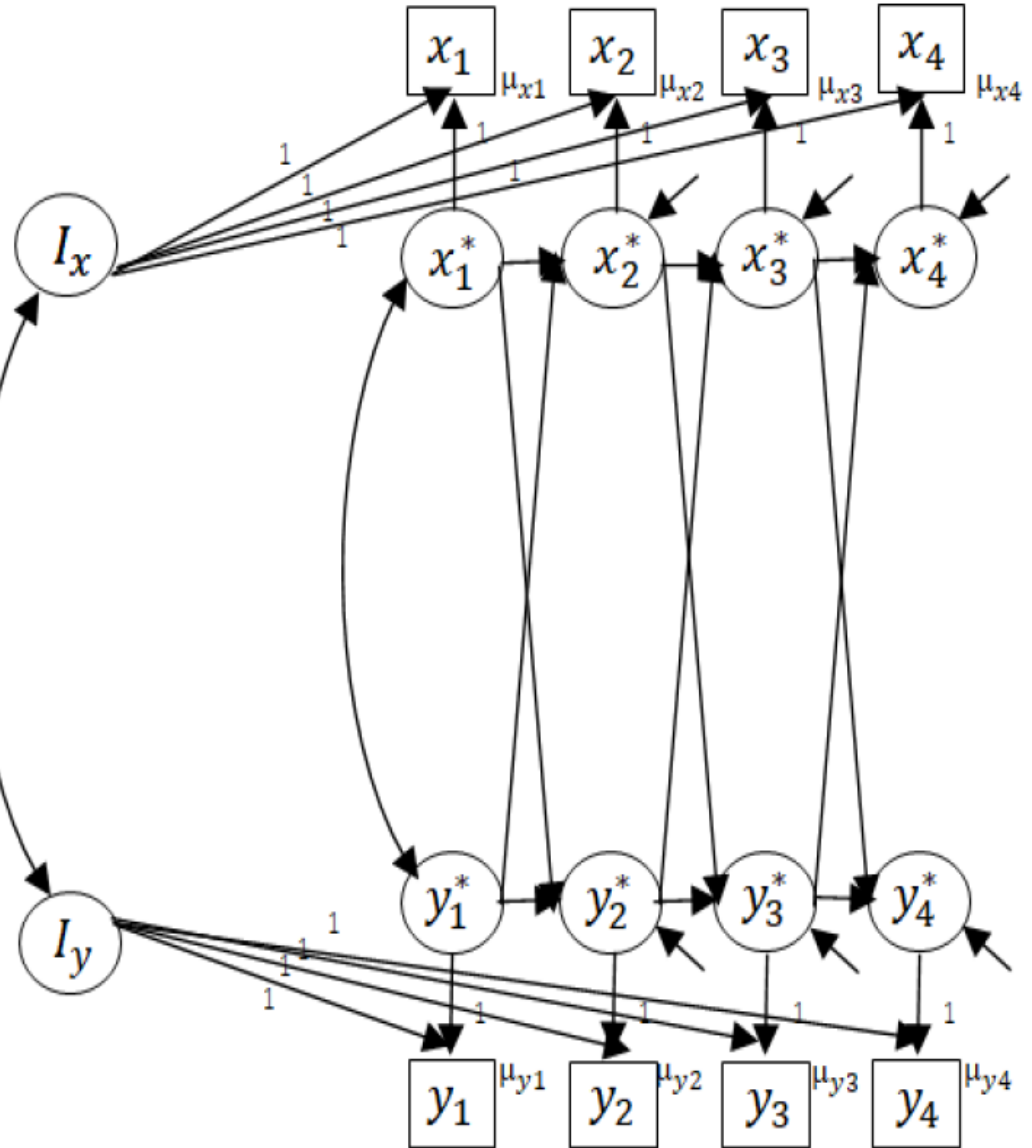


各個人の軌跡（期待値）と実際の観測値の間のずれが個人内変動。

# CLPM



# RI-CLPM



# RI-CLPMとCLPMの推定結果の比較

## 抑うつと自尊心の関係 (Orth et al., 2021 JPSP)

Table 6  
Structural Coefficients of the CLPM and RI-CLPM (Basic Version of Models)

Sample	CLPM				RI-CLPM			
	SE→D	D→SE	SE→SE	D→D	SE→D	D→SE	SE→SE	D→D
BLS	-.18*	-.04	.75*	.37*	-.06	-.04	.47*	.04
CFP, children	-.10*	-.03	.53*	.42*	-.09*	-.07	.26*	.26*
CFP, mothers	-.13*	-.14*	.51*	.46*	-.07	-.06	.16*	.13*
FTP, children	-.11*	-.07*	.63*	.47*	-.02	-.03	.29*	.12*
FTP, siblings	-.14*	-.09*	.58*	.42*	-.08	-.13*	.22*	.19*
FTP, mothers	-.14*	-.04	.75*	.55*	.00	.05	.19*	.21*
FTP, fathers	-.10*	-.08*	.64*	.53*	.06	-.02	.13*	.13*
MWI	-.18*	-.08*	.79*	.60*	.00	-.11*	.19*	.26*
NLSY79	-.12*	-.06*	.61*	.38*	-.05*	-.02	.23*	.12*
YP	-.19*	-.08*	.75*	.40*	.10	-.02	.24*	.04

Note. The table shows standardized coefficients. CLPM = cross-lagged panel model; RI-CLPM = random intercepts cross-lagged panel model; SE = self-esteem; D = depression; BLS = Berkeley Longitudinal Study; CFP = California Families Project; FTP = Family Transitions Project; MWI = My Work and I; NLSY79 = National Longitudinal Survey of Youth, 1979, Young Adults Section; YP = Your Personality.

\*  $p < .05$ .

相互関係に関する推定結果（効果量・符号・統計的有意性）がモデルによって異なる。

# RI-CLPMとCLPMの推定結果の比較

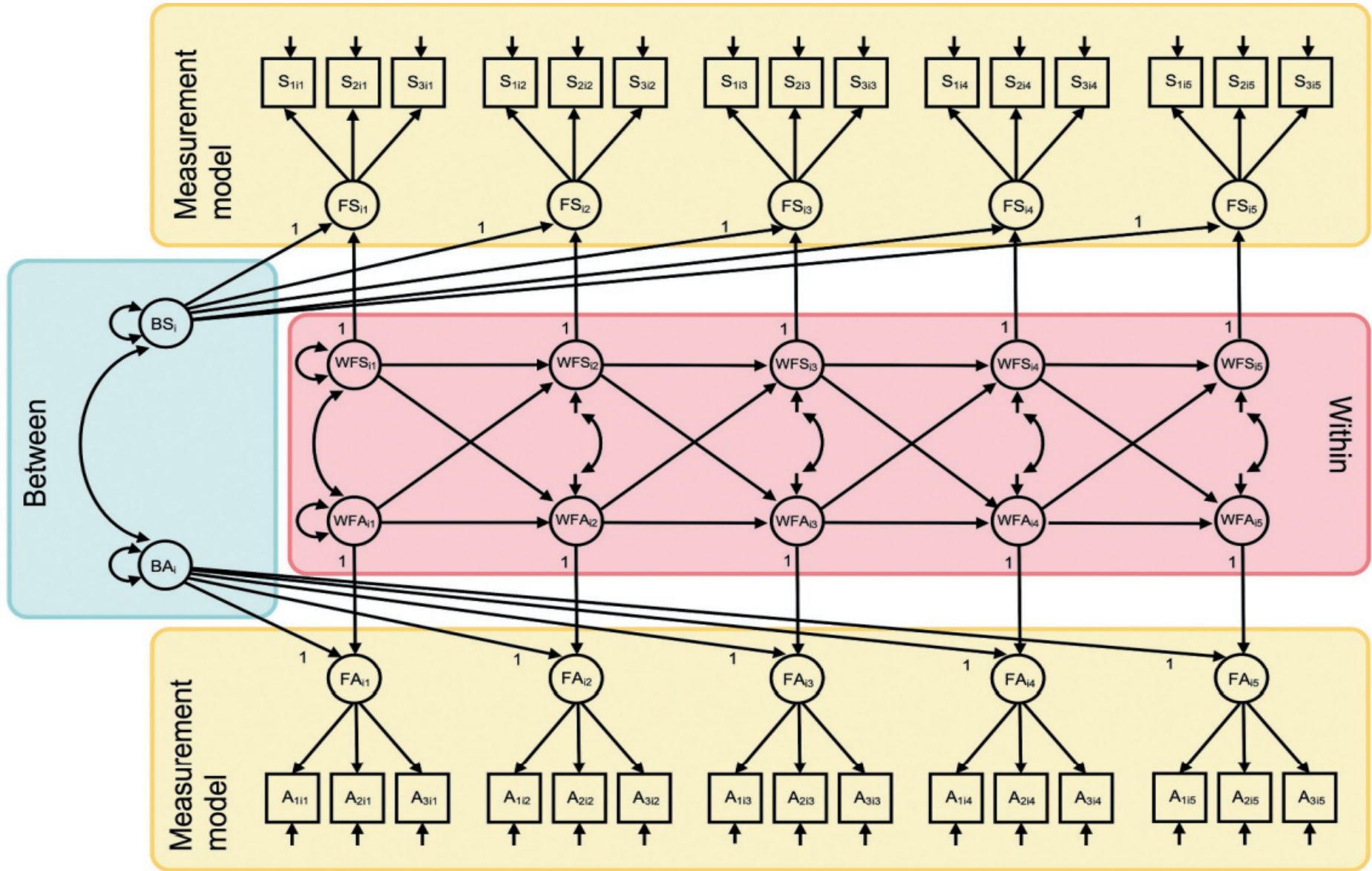
- ・ 特性因子の（共）分散の真値が大きいほど、交差遅延係数の推定結果がモデル間で異なり、またRI-CLPMの方が高い適合度を示す。
- ・ 特性因子で統制した後の個人内関係を見ていることを反映して、RI-CLPMの自己回帰係数はより小さく、また係数の標準誤差が大きくなる（Mulder & Hamaker, 2021）。

# RI-CLPMの補足

- ・ 因子負荷を1に固定した（2因子）モデルと捉えられる。
- ・ 特性因子による統制は、時不変的な量による統制を意味する。  
⇒ 時間変動的な交絡変数があれば別途統制する必要。
- ・ RI-CLPMの母数の識別には、3時点以上必要。CLPMは2時点で識別可能（しかし、実際の研究の多くが2,3時点; Usami, Todo et al., 2019）。
- ・ RI-CLPMに測定誤差の存在を仮定したモデル（STARTS）もあるが、不適解が生じやすい。
- ・ 1方向の関係を主に扱う変量効果モデルと考え方は近いが、両変数とも真値のセンタリングを行った表現と考えられる（後述）。



# 多重指標を扱う場合； Mulder & Hamaker (2021)



# 補足：心理学研究で起きていること

## 問題1

- RI-CLPMのように個人内関係と個人差を分割するアプローチは主流になりつつあるが、現在でも論争があり、RI-CLPMへの批判もある（Asendorpf, 2021; Orth et al., 2021; Hamaker, 2023）。

## 問題2

- 個人内関係を推測する際に、統計モデルの選択肢はRI-CLPM以外にも既に様々なものがある（詳細は、Usami, Murayama et al., 2019; 宇佐美, 2022）。いつどのモデルを使うべきか?この点も研究者間で立場が異なる。
- 研究の再現性とも関わる問題。

## 補足：RI-CLPMを巡って

- Asendorpf(2021) は親による過大評価（parental overevaluation）と子どもの自己愛（narcissism）の関係を例に、（個人間差としての）親の慢性的な過大評価が主要な原因でそれが交差遅延効果の中に反映されるべき成分であるから、（CLPMのような）分割を前提としないモデル設定の必要性を主張。
- 加えて、Asendorpf(2021) やOrth et al. (2021) では、長期的な時間スパンで見れば安定した個人間差は存在しないことを主張。
- Hamaker(2023) は特性因子はあくまで当該研究の測定期間内での安定した個人差と説明するとともに、経験的な観点から、長期のスパンで見ても0でない交差遅延相関（cross-lagged correlation）が観察され安定した個人差が存在すること（すなわち、長期に亘るほど交差遅延相関が0になると暗に仮定しているCLPMは不適切であること）を述べている。

# 自己相関と交差遅延相関の分布例 (Hamaker, 2023)

Figure 4

Correlations Plotted Against the Time Interval Between Measurements From the 10 Data Sets Used by Orth et al. (2021)

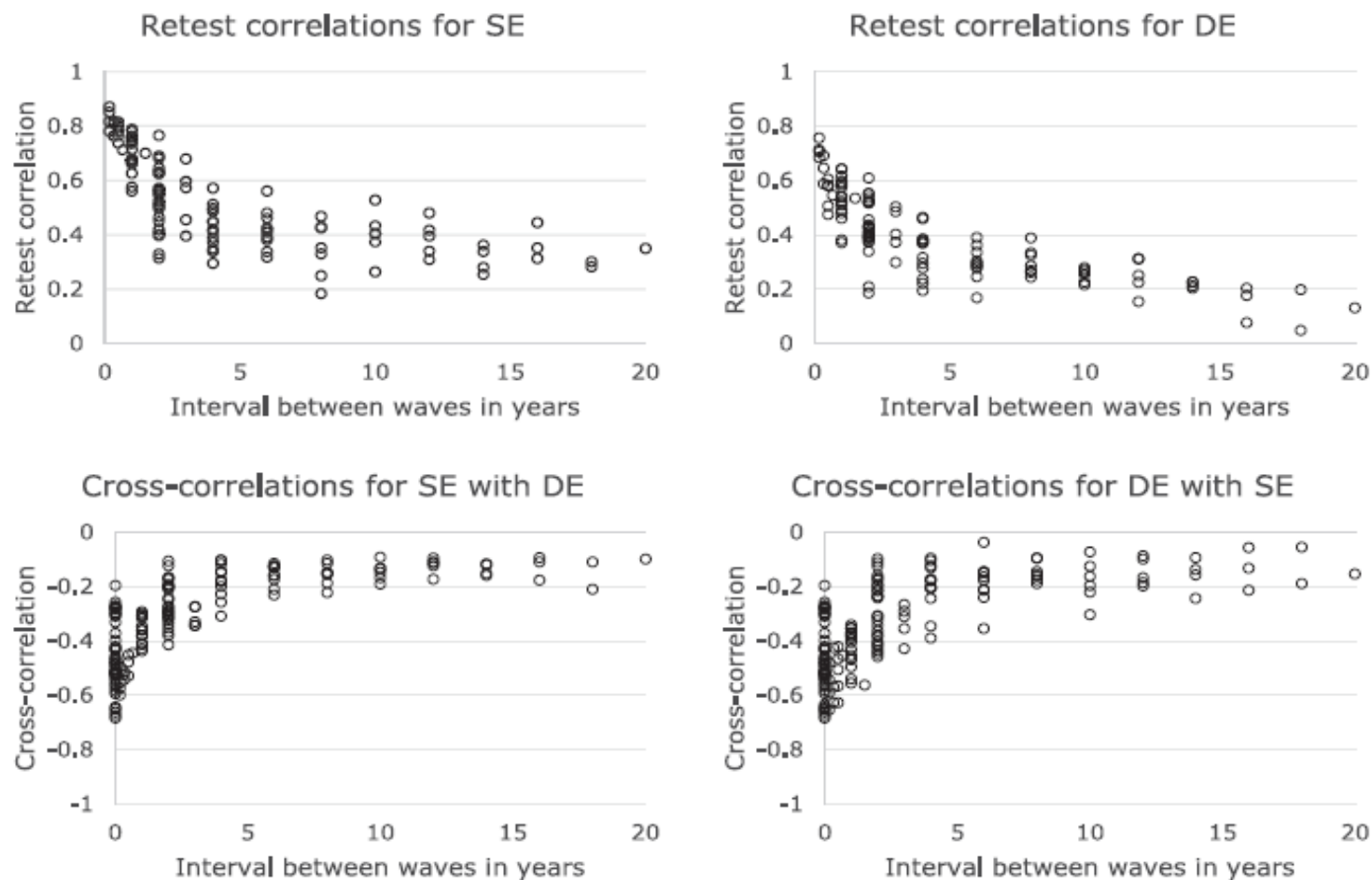
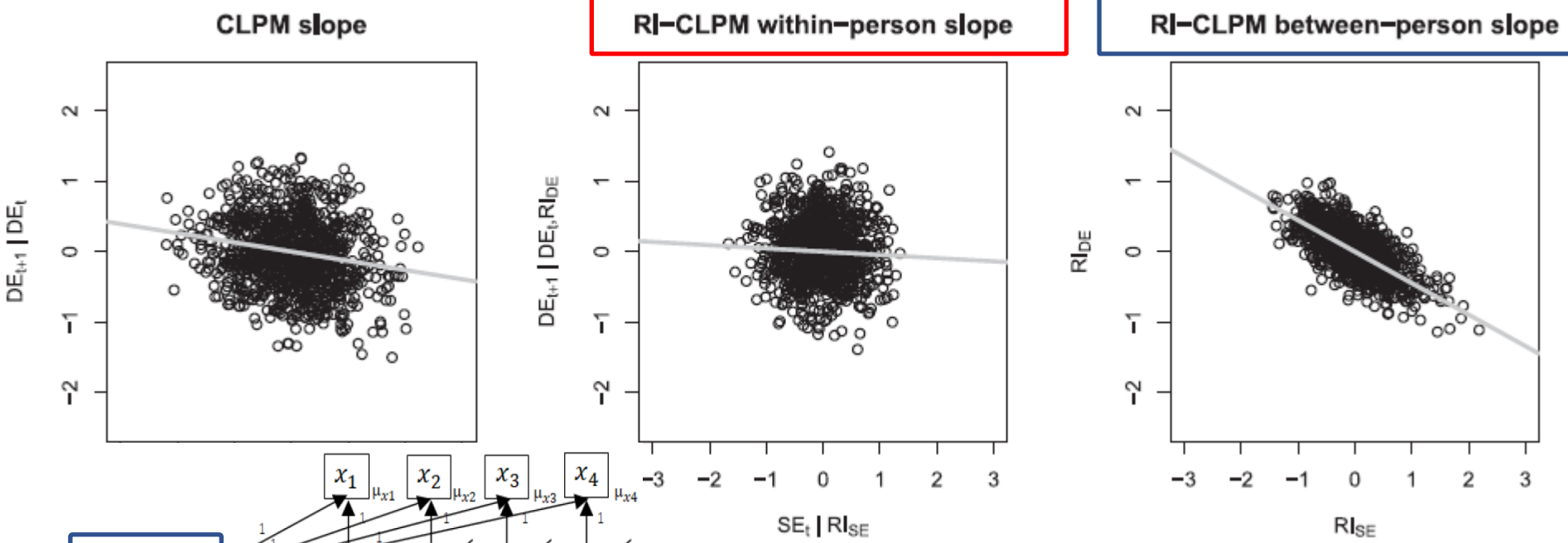
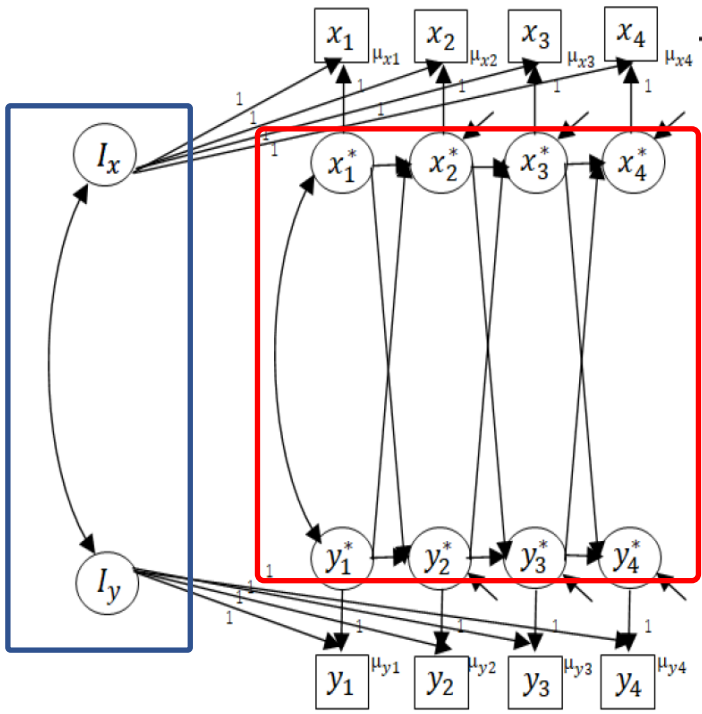


Figure 5  
Three Slopes From Different Models



Hamaker (2023)



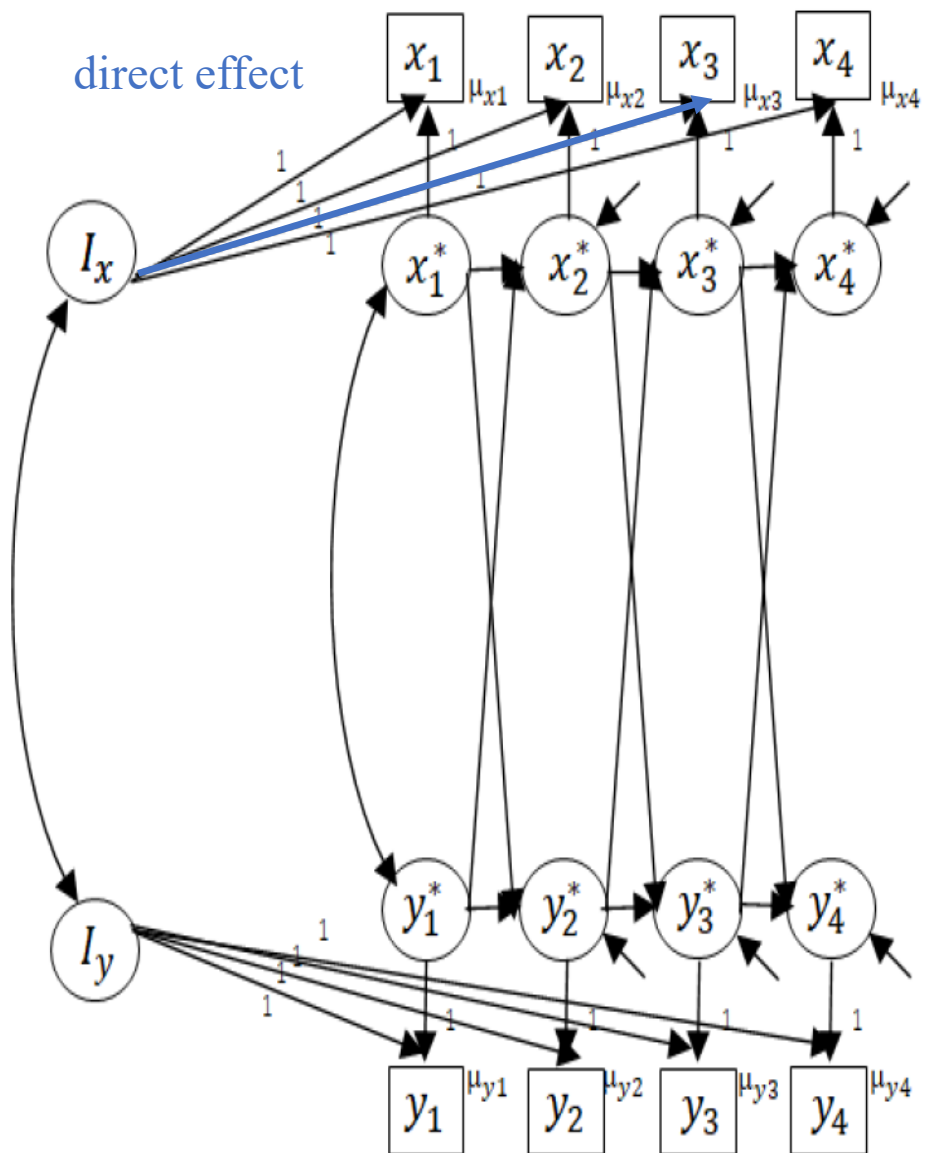
・個人内関係がより時間的に短い  
スパンで生起している関係を表現  
しているのに対し、特性因子間の  
関係はより長期のスパンに基づく  
関係を表現している。

# DPM (dynamic panel model: 動学的パネルモデル)

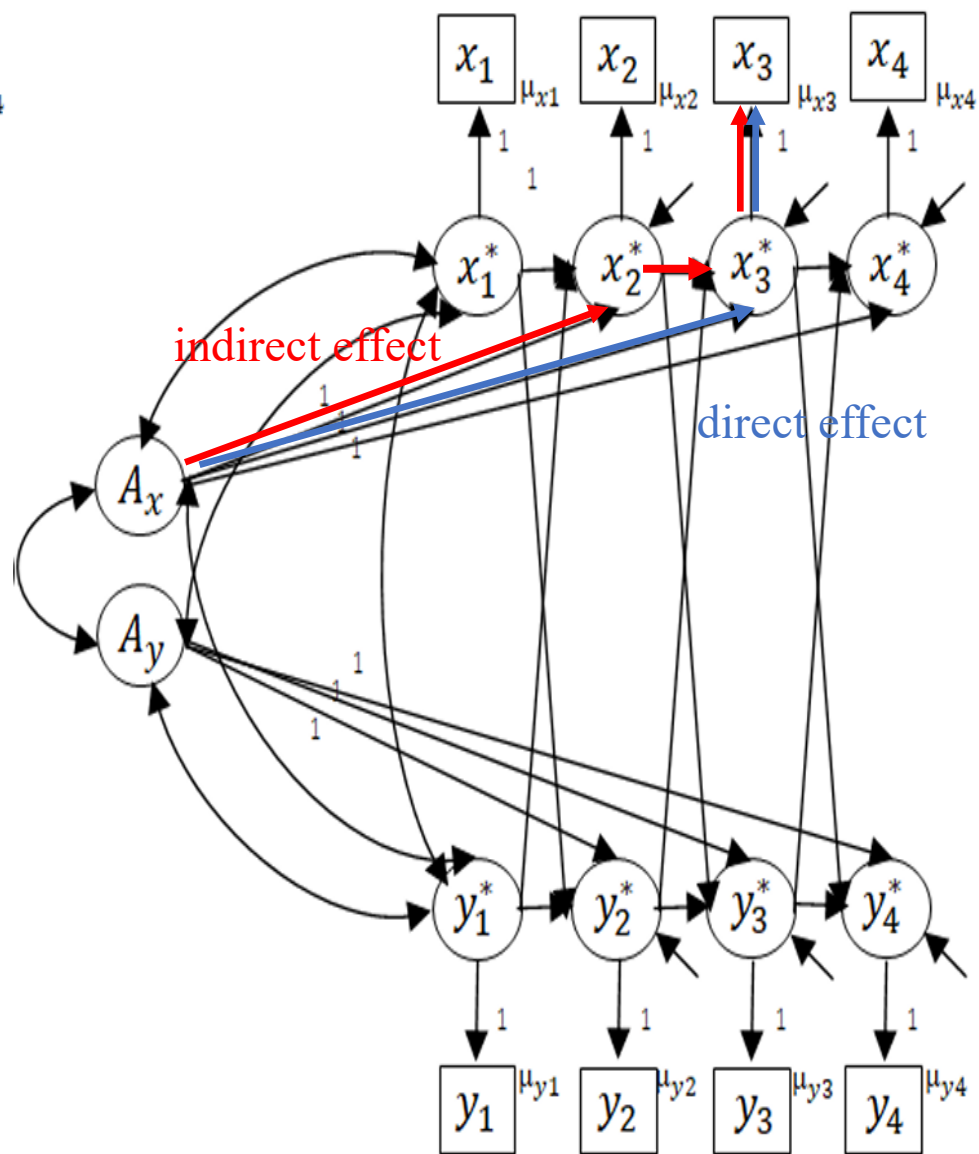
$$y_{it} = \alpha_{yt} + A_{yi} + \beta_y y_{i(t-1)} + \gamma_y x_{i(t-1)} + d_{yit}$$
$$x_{it} = \alpha_{xt} + A_{xi} + \beta_x x_{i(t-1)} + \gamma_x y_{i(t-1)} + d_{xit}$$

- ・ **個人効果（個別効果）** を表す因子  $A$ （平均0）が含まれる。
- ・ 計量経済学の領域で特によく利用される（ただし、時不変的な係数を仮定し、一方向の関係性が検討されることが多い）。
- ・ RI-CLPMとは異なり、**回帰式の中に**因子が含まれる。
- ・ 因子  $A$  は観測値への直接効果と間接効果の両方があり、ある時点の観測値への影響が後続の時点にも累積する。一方、**特性因子は直接効果のみ。**
- ・ 以下、因子  $A$  を **累積因子** と呼ぶ。

# RI-CLPM



# DPM

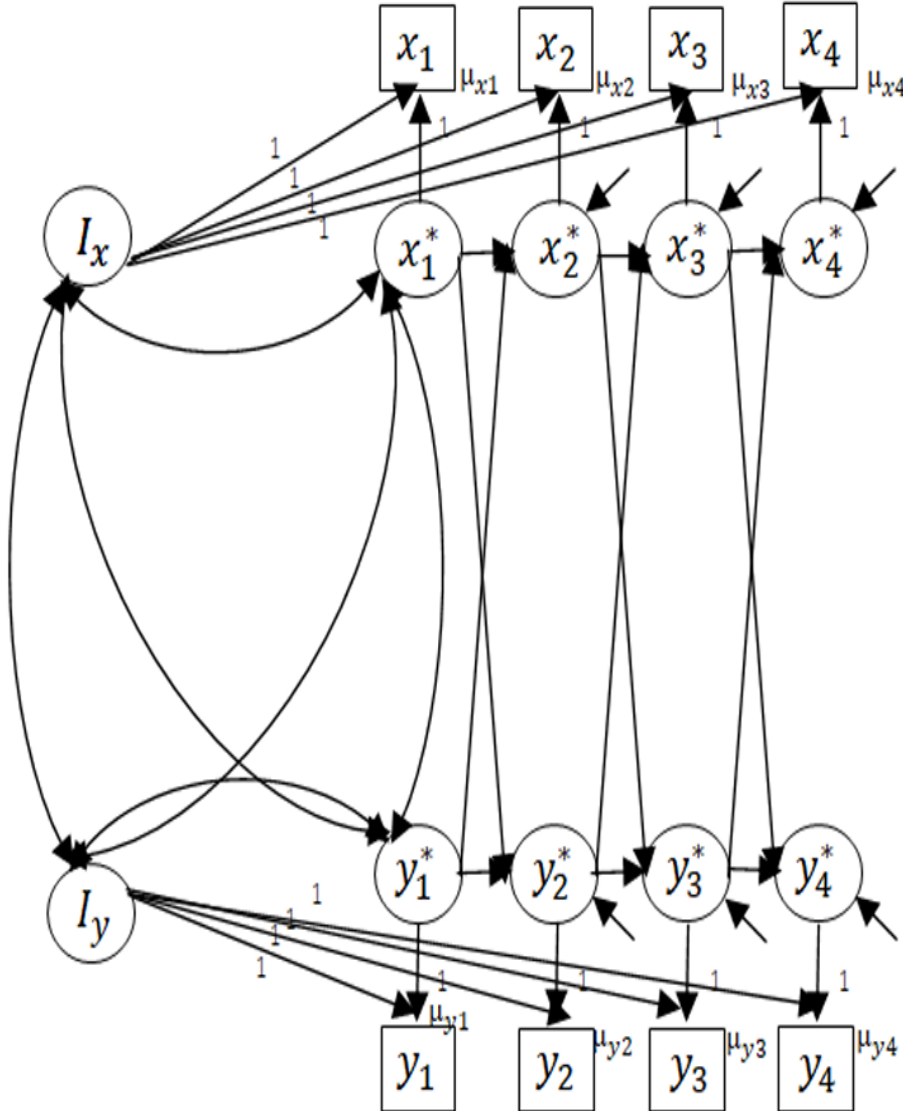


# RI-CLPMとDPM

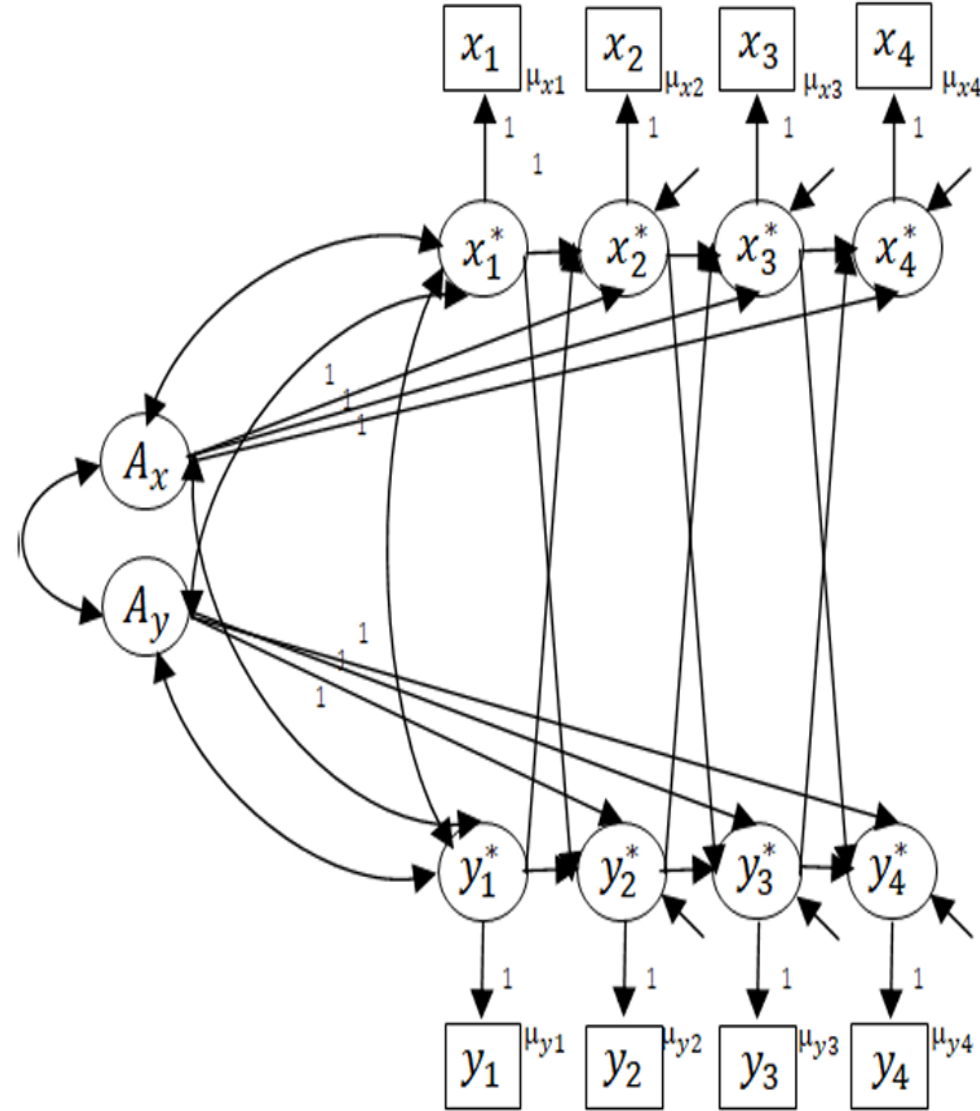
- ・ RI-CLPMにおいて特性因子と個人内変動の間に相関があると仮定することも可能(**predetermined RI-CLPM**と呼ぶ)。
- ・ 時不変的な係数を仮定すると、 $\gamma$ などの係数の値は **predetermined RI-CLPMとDPMの間で等しい(Andersen, 2021)**。
- ・ **predetermined RI-CLPMは、測定値の分散を個人内と個人間の分散に直交分割できない。RI-CLPMとは異なる設計思想。**
- ・ このように個人差、個人間の異質性の統計的表現は多様。



predetermined RI-CLPM



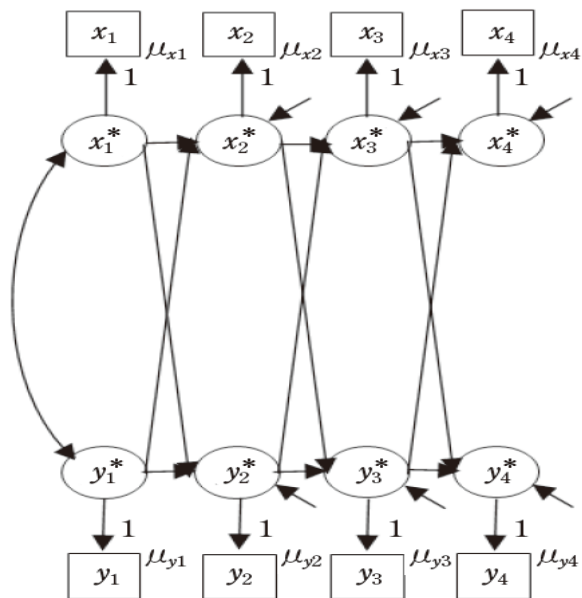
DPM



時不変的な係数を仮定すると二つのモデルは同値

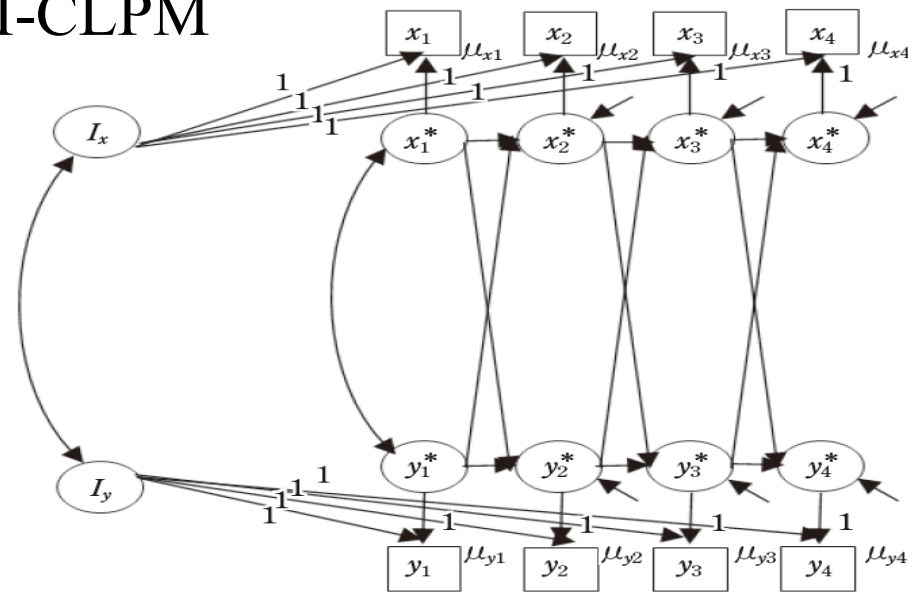
# CLPM

宇佐美(2022)



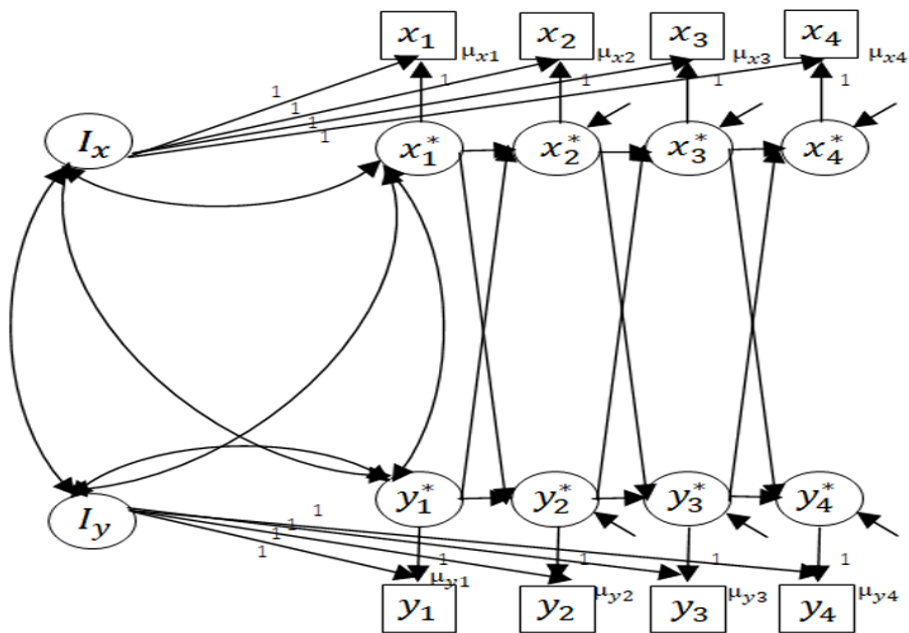
CLPM

# RI-CLPM



RI-CLPM

# predetermined RI-CLPM



# Dynamic panel model (DPM)

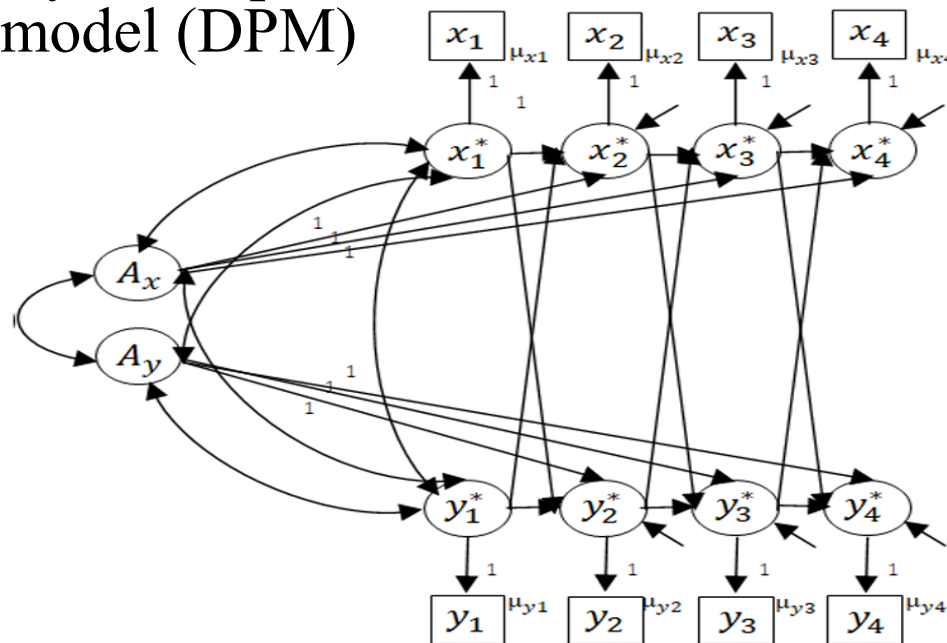


表 44 各統計モデルに基づく分析結果の比較

	CLPM		RI-CLPM				preRI-CLPM				DPM					
	時不変		時変		時不変		時変		時不変		時変		時不変		時変	
	Est.	SE	Est.	SE	Est.	SE	Est.	SE	Est.	SE	Est.	SE	Est.	SE	Est.	SE
$T_{ML}$	245.6		74.6		191.7		23.2		181.1		8.9		181.1		8.5	
$p$	.00		.00		.00		.01		.00		.11		.00		.13	
$df$	26		12		23		9		19		5		19		5	
LL	-19613		-19528		-19586		-19502		-19581		-19495		-19581		-19495	
AIC	39262		39120		39215		39074		39212		39068		39212		39067	
BIC	39356		39285		39323		39255		39341		39270		39341		39269	
CFI	0.860		0.960		0.892		0.991		0.896		0.998		0.896		0.998	
RMSEA	0.081		0.064		0.075		0.035		0.081		0.024		0.081		0.023	
下限	0.072		0.050		0.066		0.018		0.071		0.000		0.071		0.000	
上限	0.090		0.078		0.085		0.053		0.092		0.050		0.092		0.049	
SRMR	0.074		0.036		0.069		0.020		0.070		0.010		0.070		0.009	
$\beta_{y2}$	.39	.02	.38	.02	.27	.03	.24	.03	.26	.03	.26	.03	.26	.03	.25	.03
$\gamma_{y2}$	-.25	.07	.02	.14	-.41	.11	-.08	.20	-.35	.14	.11	.21	-.35	.14	-.03	.19
$\beta_{z2}$	.50	.02	.54	.03	.40	.02	.43	.05	.45	.05	.43	.05	.45	.05	.44	.05
$\gamma_{z2}$	.01	.00	.01	.01	.00	.00	.01	.01	.00	.01	-.00	.01	.00	.01	-.00	.01
$\beta_{y3}$	.39	.02	.33	.03	.27	.03	.12	.05	.26	.03	.06	.06	.26	.03	.12	.05
$\gamma_{y3}$	-.25	.07	-.39	.13	-.41	.11	-.53	.18	-.35	.14	-.56	.22	-.35	.14	-.58	.21
$\beta_{z3}$	.50	.02	.56	.03	.40	.02	.47	.04	.45	.05	.55	.05	.45	.05	.55	.07
$\gamma_{z3}$	.01	.00	.01	.01	.00	.00	.01	.01	.00	.01	.00	.01	.00	.01	-.00	.01
$\beta_{y4}$	.39	.02	.44	.03	.27	.03	.28	.04	.26	.03	.21	.06	.26	.03	.26	.05
$\gamma_{y4}$	-.25	.07	-.28	.13	-.41	.11	-.44	.15	-.35	.14	-.48	.19	-.35	.14	-.54	.20
$\beta_{z4}$	.50	.02	.42	.03	.40	.02	.35	.03	.45	.05	.44	.05	.45	.05	.43	.07
$\gamma_{z4}$	.01	.00	.00	.01	.00	.00	-.00	.01	.00	.01	-.01	.01	.00	.01	-.00	.01

宇佐美(2022)を参照。

# RI-CLPMとDPMの比較

- 時不変な係数と残差（共）分散を仮定した場合は、predetermined RI-CLPMとDPMで係数（および標準誤差）の推定結果が等しい。
- また、predetermined RI-CLPMとDPMは共に累積（「的な」）因子が時變的に寄与するという意味で柔軟な表現力を有することを反映して、RI-CLPMよりも高い適合度を示している。
- （時變的な条件において）DPMはRI-CLPMやpredetermined RI-CLPMと比べ、一部の交差遅延係数の統計的有意性が一致しない。

# モデル選択

- 真のデータ発生プロセス内に特性因子と累積因子のいずれ（または両方）が含まれるのかはほとんどの場合不明（e.g., Andersen, 2021; Usami, 2023）。
- **RI-CLPM**や**DPM**など特定のモデルを支持して推定しながらも、他の候補についても感度分析として推定を行い、適合度指標等も参照しながらモデル選択の適切性や結果の頑健性を検討するのが現実的か。

# どのモデルか？の前にー研究デザイナー

- ・ 縦断デザインの主要な観点 (Hamaker, 2023)

**時間枠** (time frame; 回答者に現在のことを尋ねるか、ここ数日など時間的広がりをもって尋ねるのか)

**時点間の幅** (time interval)

**時点数**

- ・ これらを通して研究の**時間スパン (time span)** が決定される。関係性の推測結果はこれらの設定に依存する。
- ・ RI-CLPM を使った場合も、交差遅延係数の推定値はこれらの設定に依存する。(時不変的な係数の仮定の下で) 連続時間モデルの利用は一つの対処。
- ・ 関心のある現象のプロセスがいつ、どのような速度で展開するのかに関する実質科学的知見のもとで、時間的スパンを意識しながら最適なデザインを選択することが重要。

# アウトライン

- 導入
- 潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング
- 交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測
- 強縦断データと動学的SEM
- 軌跡の分類と潜在成長混合モデリング
- 欠測データの処理

# 強縦断データと動的SEM

- ・心理学領域における伝統的な縦断データでは測定区間幅がしばしば年・月単位と広く、また $T=3-8$ 程度と時点数が少ないタイプが主流。
- ・近年では、測定技術の向上に伴って、経験サンプリングに基づく強縦断データ（ILD）の収集が増加。
- ・厳密な定義はないが、典型的には、個人の数だけでなく時点数も $T \geq 10$ 程度と大きく、また測定区間幅が日や分、秒などの比較的狭いデータを指す。
- ・Mplusで強縦断データのための動的SEM（Dynamic SEM: DSEM, Asparouhov, Hamaker, & Muthen, 2018）のモジュールがVer.8から搭載。SEMのように複数の観測変数と潜在変数を同時に扱うことができる。
- ・DSEMではMCMC法に基づくベイズ推測が利用される。



# Dynamic SEM

- 各個人の特性と各時点の「効果」を除いた上で個人内関係を推論するための枠組。

Between-level  
model

$$Y_{it} = Y_{1,it} + Y_{2,i} + Y_{3,t}, \quad (1)$$

$$Y_{2,i} = v_2 + \Lambda_2 \eta_{2,i} + K_2 X_{2,i} + \varepsilon_{2,i} \quad (2)$$

$$\eta_{2,i} = \alpha_2 + B_2 \eta_{2,i} + \Gamma_2 X_{2,i} + \xi_{2,i} \quad (3)$$

$$Y_{3,t} = v_3 + \Lambda_3 \eta_{3,t} + K_3 X_{3,i} + \varepsilon_{3,t} \quad (4)$$

$$\eta_{3,t} = \alpha_3 + B_3 \eta_{3,t} + \Gamma_3 X_t + \xi_{3,t}. \quad (5)$$

model



Check for updates

## Dynamic Structural Equation Models

Tihomir Asparouhov,<sup>1</sup> Ellen L. Hamaker,<sup>2</sup> and Bengt Muthén<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Muthén & Muthén, Los Angeles, CA  
<sup>2</sup>Utrecht University

Within-level

model

This article presents dynamic structural equation modeling (DSEM), which can be used to study the evolution of observed and latent variables as well as the structural equation models over time. DSEM is suitable for analyzing intensive longitudinal data where observations from multiple individuals are collected at many points in time. The modeling framework encompasses previously published DSEM models and is a comprehensive attempt to combine time-series modeling with structural equation modeling. DSEM is estimated with Bayesian methods using the Markov chain Monte Carlo Gibbs sampler and the Metropolis–Hastings sampler. We provide a detailed description of the estimation algorithm as implemented in the *Mplus* software package. DSEM can be used for longitudinal analysis of any duration and with any number of observations across time. Simulation studies are used to illustrate the framework and study the performance of the estimation method. Methods for evaluating model fit are also discussed.

$$Y_{1,it} = v_1 + \sum_{l=0}^L \Lambda_{1,l} \eta_{1,i,t-l} + \sum_{l=0}^L R_l Y_{1,i,t-l} + \sum_{l=0}^L K_{1,l} X_{1,i,t-l} + \varepsilon_{1,it} \quad (6)$$

$$\eta_{1,it} = \alpha_1 + \sum_{l=0}^L B_{1,l} \eta_{1,i,t-l} + \sum_{l=0}^L Q_l Y_{1,i,t-l} + \sum_{l=0}^L \Gamma_{1,l} X_{1,i,t-l} + \xi_{1,it}. \quad (7)$$

Asparouhov, T., Hamaker, E. L., & Muthén, B. (2018). Dynamic structural equation models. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 25, 359-388. doi: 10.1080/10705511.2017.1406803

# 相互関係の推測のためのモデル例 (McNeish & Hamaker, 2020)

Within-level  
model

$$\begin{aligned}y_{it} - I_{yi} &= \phi_{yi}(y_{i(t-1)} - I_{yi}) + \beta_{yi}(x_{i(t-1)} - I_{xi}) + e_{yit} & e_{yit} &\sim N(0, \sigma_{yi}^2) \\x_{it} - I_{xi} &= \phi_{xi}(x_{i(t-1)} - I_{xi}) + \beta_{xi}(y_{i(t-1)} - I_{yi}) + e_{xit} & e_{xit} &\sim N(0, \sigma_{xi}^2)\end{aligned}$$

Between-level  
model

$$\begin{aligned}I_{yi} &= \gamma_{y00} + u_{y0i} \\ \phi_{yi} &= \gamma_{y10} + u_{y1i} \\ \beta_{yi} &= \gamma_{y20} + u_{y2i} \\ \sigma_{yi}^2 &= \exp(\omega_{y0} + u_{y3i}) \\ I_{xi} &= \gamma_{x00} + u_{x0i} \\ \phi_{xi} &= \gamma_{x10} + u_{x1i} \\ \beta_{xi} &= \gamma_{x20} + u_{x2i} \\ \sigma_{xi}^2 &= \exp(\omega_{x0} + u_{x3i})\end{aligned}$$

\*変量効果 $\mu$ の間は  
8変量正規分布  
を仮定 (分散は $\tau$ )。

特徴：

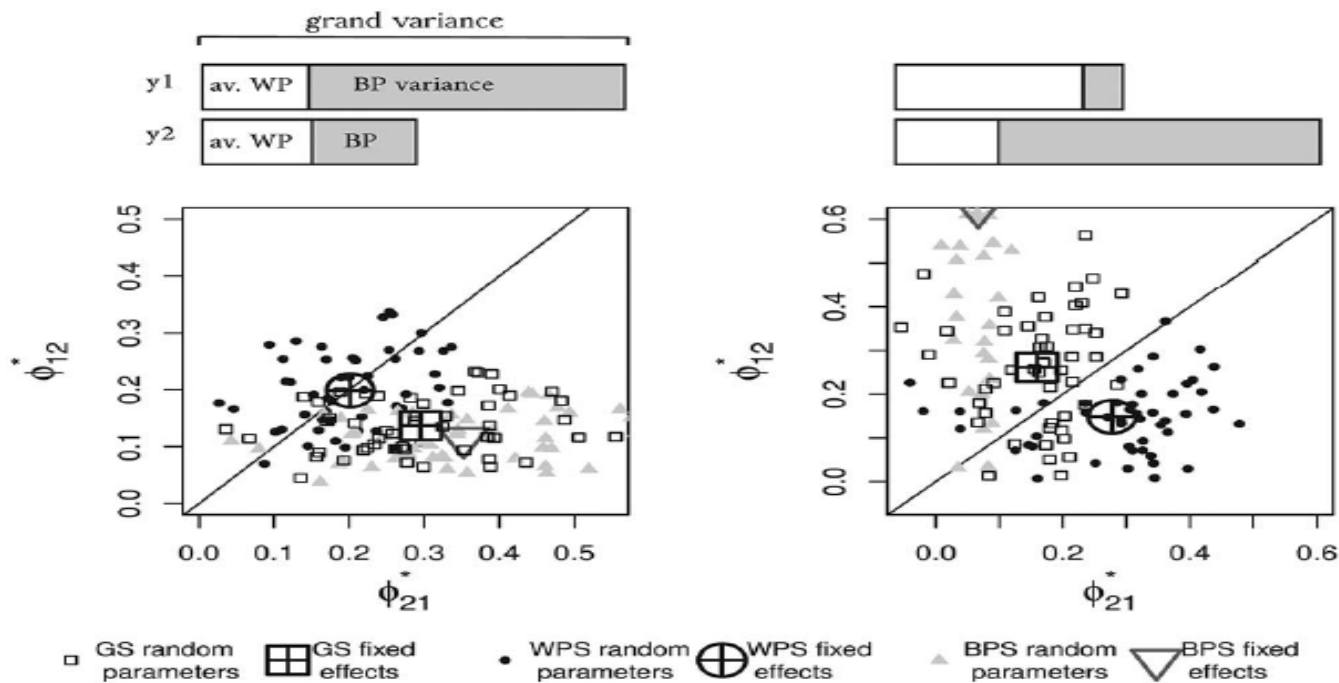
- ・ 時不変な係数を仮定 (ILDではしばしば課される仮定)。時間によるランダムな変動を仮定することも可能。
- ・ 個人内関係の推測のため (真値による) **センタリング**を行っている (実は、RI-CLPMと同じ発想)。
- ・ 自己回帰係数、交差遅延係数、また**残差分散**が個人に依存することを表現 (変量効果モデルとして、これら母数の平均や分散を推定)。

表 52 喫煙への衝動 (URGE) と抑うつ (DEP) に関する集中縦断データ  
( $N = 100, T = 50$ )

URGE	DEP	JS	HS	PERSON	TIME
0.338045	0.430776	0.369423	0.569713	1	1
-0.47816	-0.68128	0.369423	0.569713	1	2
-4.437779	-1.490989	0.369423	0.569713	1	3
-4.188293	-0.736173	0.369423	0.569713	1	4
-0.911973	-0.520763	0.369423	0.569713	1	5
...	...	...	...	...	...
1.646669	0.677749	-0.159431	-0.442573	2	1
0.308476	1.488078	-0.159431	-0.442573	2	2
0.462436	0.031332	-0.159431	-0.442573	2	3
-1.091857	-1.019932	-0.159431	-0.442573	2	4
1.66723	1.068367	-0.159431	-0.442573	2	5
...	...	...	...	...	...
-2.325208	-0.466692	-1.555758	0.343487	100	50

非標準化		
	Est.	se
$\gamma_{y00}(intercept)$	-0.012	0.088
$\gamma_{y10}(auto)$	0.175	0.022
$\gamma_{y20}(cross)$	0.018	0.022
$\gamma_{x00}(intercept)$	0.010	0.016
$\gamma_{x10}(auto)$	0.010	0.019
$\gamma_{x20}(cross)$	-0.025	0.012
$\omega_{y0}(\log)$	0.663	0.075
$\omega_{x0}(\log)$	-0.011	0.020
$\tau_{y00}(intercept)$	0.622	0.107
$\tau_{y11}(auto)$	0.021	0.006
$\tau_{y22}(cross)$	0.003	0.002
$\tau_{y33}(\log)$	0.507	0.083
$\tau_{x00}(intercept)$	0.002	0.002
$\tau_{x11}(auto)$	0.003	0.003
$\tau_{x22}(cross)$	0.001	0.001
$\tau_{x33}(\log)$	0.007	0.003
$R^2(URGE)$		
$R^2(Dep)$		

- $y$ の残差分散の平均は  $\exp(0.663) = 1.941$ 。
- 1 次のUrge からDep に対する交差遅延係数の平均は有意であるが、いずれの回帰式も係数や決定係数は大きくない。
- Withinまたはbetweenのいずれのレベル（あるいは全体）の分散で標準化するかは任意。個人別に推定された残差分散を用いた、**個人内標準化した**係数の平均と分散が求められる（ここでは省略）。



*Figure 1.* Plots of simulated individual cross-lagged parameters and accompanying fixed effects, with squares indicating grand standardized (GS) parameters, triangles indicating between-person standardized (BPS) parameters, and circles indicating within-person standardized (WPS) parameters. The area below the diagonal line implies that the association between  $y_1$  with future  $y_2$  is the strongest, and the area above the diagonal line implies that the association between  $y_2$  with future  $y_1$  is the strongest. When the ratios of the BP variances, grand variances for  $y_1$  and  $y_2$ , and the WP variances for  $y_1$  and  $y_2$  are different, BP, grand, and WP standardization will result in different conclusions. These ratios for the simulated data are depicted above each of the two plots: The white rectangle indicates the average WP variance, and the gray rectangle indicates the BP variance; the total of these rectangles is equal to the grand variance. The fixed effects of the unstandardized parameters  $\gamma_{\phi_{12}}$  and  $\gamma_{\phi_{21}}$  were equal to .2 for both plots. The variances for  $\phi_{i12}$  and  $\phi_{i21}$  were equal to .005 for the first plot, and .01 for the second plot. av. WP = average within-person variance; BP variance = between-person variance.

# アウトライン

- 導入
- 潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング
- 交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測
- 強縦断データと動学的SEM
- 軌跡の分類と潜在成長混合モデリング
- 欠測データの処理
- まとめ

# 変化のパタンの分類（クラスタ分析）

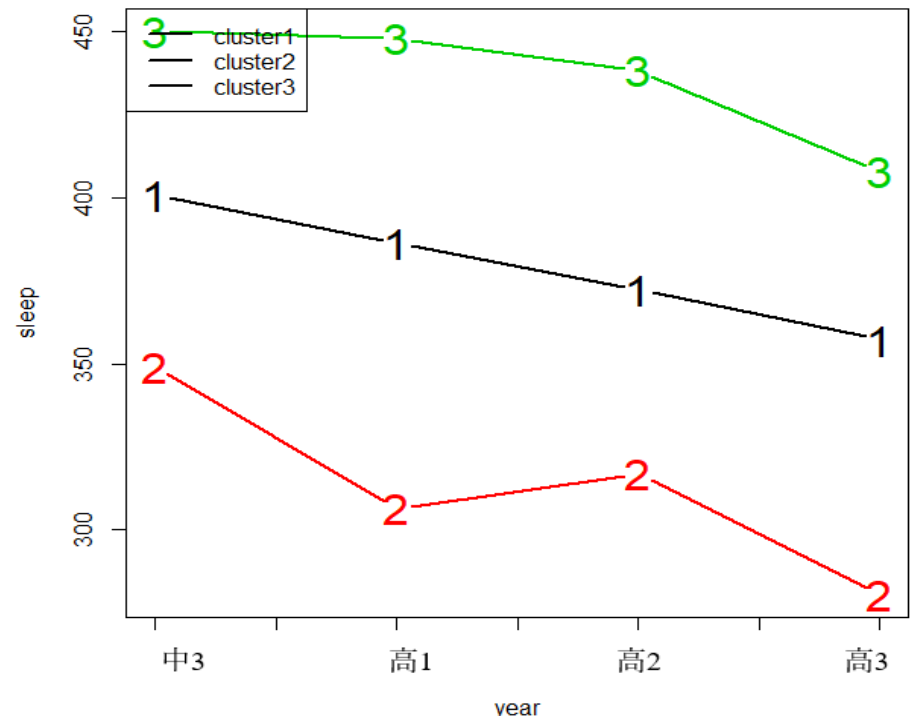
- 未知のクラス（または、クラスタ）によって分類する。
- 例えば、非階層的クラスタリング手法のk-means  
→データ間の無相関性や等分散性を仮定した最も単純な方法。

- Rではkmeans関数がある。

class1 44%; class2 12%; class3 44%

$$Q = \sum_c^C \sum_i^{N_c} (y_i^c - \mu^c)^T (y_i^c - \mu^c)$$

右図は推定された各クラスの平均をプロットしているものであるが、実際にはクラス内にも個人差があることに注意。



\*中3-高3の睡眠時間のデータ

- (1) クラス数 $C$ を事前設定し、各個人をランダムにいずれかのクラスに割りあてる。
- (2) 各クラスに所属する個人の観測値の平均を用いて、クラス  
の中心ベクトル ( $\mu^c$ ) をクラス別に得る。
- (3)  $\mu^c$ の推定値を利用し、各個人の観測値ベクトル $\mathbf{y}_i^c$ と $\mu^c$ の距離がもっとも近いクラスとして、基準  
 $Q_i = (\mathbf{y}_i^c - \mu^c)^T (\mathbf{y}_i^c - \mu^c)$ が最小のクラスに割りあてる。
- (4) (2) および(3) のステップを繰り返して、各個人の所属する  
クラスが変化しない場合や、 $Q$  の変化量が一定以下となった  
場合に解が収束と判断して終了する。

\*局所解を防ぐため、通常、複数の初期値に基づく解を比較し最適なものを選択する (multiple starts)。以後の方法も同様。



# 変化のパタンの分類 (finite/Gaussian mixture model, 混合モデル)

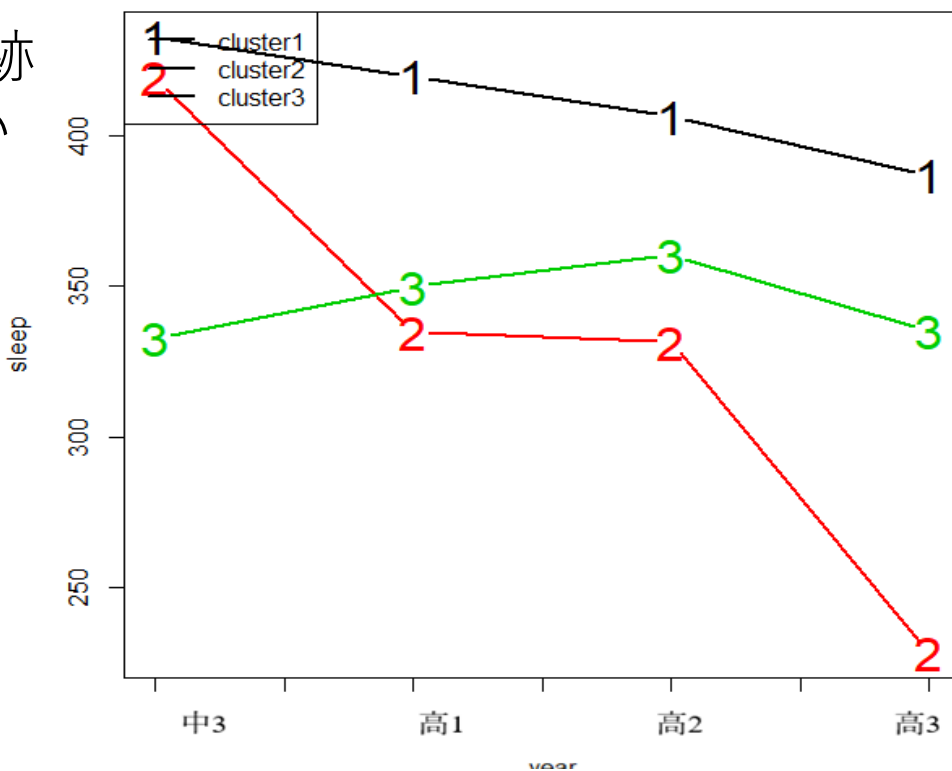
- データに統計分布 (e.g., 多変量正規分布) を仮定する。
- Rでは**mclust**パッケージが利用できる。クラス間・内の分散共分散行列について様々な制約を設定可能。ただし不適解が生じやすい。

• k-meansに比べ、やや特異な軌跡を示す少人数クラスを抽出している。

class1 80%; class2; 5%; class3 15%.

$$f(y_i|\mu, \Sigma) = \sum_{c=1}^C \pi_c f_c(y_i|\mu^c, \Sigma^c)$$

$$\pi_c \geq 0, \quad \sum_{c=1}^C \pi_c = 1$$



# EMアルゴリズム

(1) クラス数 $C$ とともに、各クラスの母数の初期値を定める。

(2) 暫定の母数  $(\mu^c, \Sigma^c, \pi_c)$  の推定値を基に、各個人の各クラスへの所属確率を推定する。

$$p_{ic} = p(w_{ic} = 1 | \mathbf{y}_i) = \frac{p(w_{ic} = 1) f(\mathbf{y}_i | w_{ic} = 1)}{f(\mathbf{y}_i)} = \frac{\hat{\pi}_c f_c(\mathbf{y}_i | \hat{\mu}^c, \hat{\Sigma}^c)}{\sum_{c'=1}^C \hat{\pi}_{c'} f_{c'}(\mathbf{y}_i | \hat{\mu}^{c'}, \hat{\Sigma}^{c'})}$$

$w_{ic}$  は個人 $i$ がクラス $c$ に所属している場合に1をとるダミー変数。

(3)(2) で求めた暫定の所属確率  $(p_{ic})$  を基に、各クラスの母数を推定する。

$$\sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^C p_{ic} \log \pi_c f_c(\mathbf{y}_i | \mu^c, \Sigma^c)$$

(4) 一定の収束基準が充たされるまで、(2) および(3) のステップの反復を繰り返す。

# 変化のパタンの分類 (潜在成長混合モデル; LGMM)

- LGMを用いて平均と分散共分散を構造化し、母数 $\theta$ の値が異なる複数の未知のクラスを抽出する。

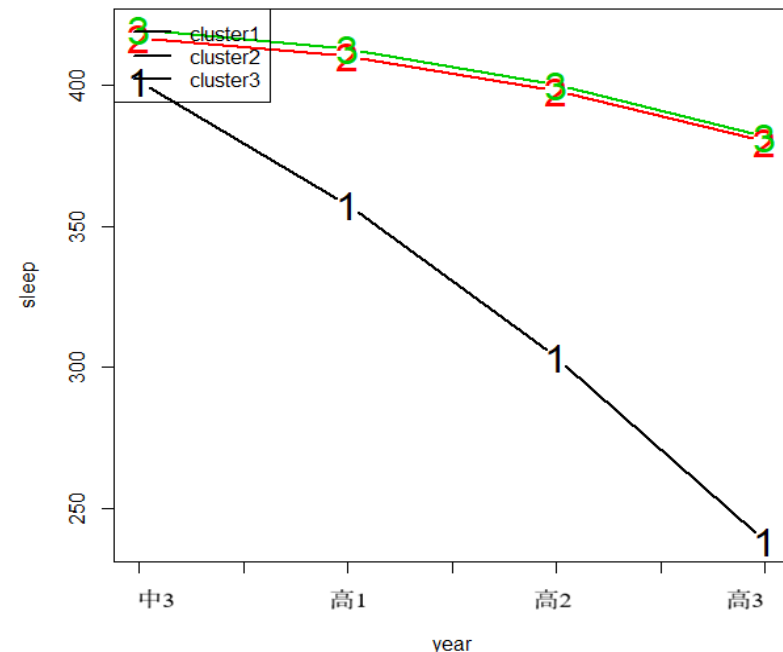
$$y_{it}^{(c)} = I_i^{(c)} + (t-1)S_{1i}^{(c)} + (t-1)^2 S_{2i}^{(c)} + \epsilon_{it}^{(c)}$$

$$L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N \sum_{c=1}^C \pi_c (2\pi)^{-\frac{T}{2}} |\Sigma^{(c)}(\theta)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}^{(c)}(\theta))^T [\Sigma^{(c)}(\theta)]^{-1} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}^{(c)}(\theta)) \right]$$

- 局所解・不適解が生じやすい  
(初期値やモデルの誤設定、正規性からの逸脱)。

• 不適解を避けるため、クラス間で等しい共分散構造や等相関構造を仮定する方法、また混合モデル (前スライド) で平均のみ構造化する方法がある (McNeish et al., 2023)

\* linear+quadraticな変化を仮定した場合。  
class1 5%; class2 61%; class3 34%



# クラスタ・クラス数の推定・決定

- クラスタ分析では、クラスタ内誤差平方和 (SSE) のプロットやそれを踏まえたCH統計量(Calinski & Harabasz, 1974) などが利用可能。混合モデルでは情報量規準が最もよく利用される。

$$CH = \frac{tr(\mathbf{B})/(C - 1)}{tr(\mathbf{W})/(N - C)}$$

$\mathbf{B}$ ...クラスタ間平方和行列;  $\mathbf{W}$ ...クラスタ内平方和行列;  $C$ ...クラスタ数

- 情報量規準**ではBICが良く利用されるが、サンプルサイズやクラス間の分離度が小さい場合、その性能は必ずしも良くない。万能な規準はない (e.g., Usami, 2014)。

$$AIC = T_h + 2m$$

$$BIC = T_h + m \log N$$

エントロピー

$$EN(p) = - \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^C p_{ic} \log p_{ic}$$

$$ICL.BIC = -2 \log L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) + m \log N + 2EN(p)$$

# 潜在成長混合モデルの適用例

表 63 主観的痛みについての評価データ ( $N = 300, T = 5$ )

ID	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	sex	age	sleep
1	2	3	4	6	7	1	60	4
2	2	3	5	5	6	1	22	7
3	2	4	5	6	8	1	45	8
4	4	4	5	7	8	1	43	7
5	3	3	5	6	8	1	36	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...
300	3	4	4	3	5	1	38	5

等値制約有り

クラス数	母数の数	対数尤度	AIC	BIC	ssBIC	Entropy
$C = 1$	9	-2314.0	4646.0	4679.3	4650.8	-
$C = 2$	13	-1995.7	4017.3	4065.5	4024.2	0.909
$C = 3$	17	-1914.5	3863.1	3926.0	3872.1	0.883
$C = 4$	21	-1889.6	3821.2	3899.0	3832.4	0.825
$C = 5$	25	-1882.7	3815.3	3907.9	3828.6	0.800
$C = 6$	29	-1878.4	3814.8	3922.2	3830.2	0.780

等値制約無し

クラス数	母数の数	対数尤度	AIC	BIC	ssBIC	Entropy
$C = 1$	9	-2314.0	4646.0	4679.3	4650.8	-
$C = 2$	19	-1977.7	3993.5	4063.8	4003.6	0.899
$C = 3$	29	-1889.7	3837.4	3944.9	3852.9	0.861

・潜在成長混合モデルはMplusやAmos（ベイズ推定）などで実行可。

・RではOpenMxの他、HLMをベースにした成長混合モデルのためのLCMMパッケージが利用可能。

表 68  $C = 4$  の LGMM 内の母数の推定値 (標準誤差)。\*切片因子と残差の分散はクラス間で等値に制約

母数	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$
$\pi$	0.27	0.34	0.21	0.18
$\mu_I$	2.716 (0.167)	1.851 (0.132)	2.567 (0.135)	3.404 (0.135)
$\mu_{S1}$	0.243 (0.091)	0.048 (0.063)	0.627 (0.163)	0.842 (0.098)
$\mu_{S2}$	0.032 (0.037)	-0.010 (0.011)	0.064 (0.029)	0.144 (0.022)
$\phi_I^2$	0.776 (0.087)	0.776 (0.087)	0.776 (0.087)	0.776 (0.087)
$\psi_1^2$	0.297 (0.044)	0.297 (0.044)	0.297 (0.044)	0.297 (0.044)
$\psi_2^2$	0.193 (0.024)	0.193 (0.024)	0.193 (0.024)	0.193 (0.024)
$\psi_3^2$	0.259 (0.030)	0.259 (0.030)	0.259 (0.030)	0.259 (0.030)
$\psi_4^2$	0.322 (0.042)	0.322 (0.042)	0.322 (0.042)	0.322 (0.042)
$\psi_5^2$	0.290 (0.057)	0.290 (0.057)	0.290 (0.057)	0.290 (0.057)

最初の痛みがやや強いがその後の変化は中程度のクラス

最初の痛みは小さく、その後の変化も小さいクラス

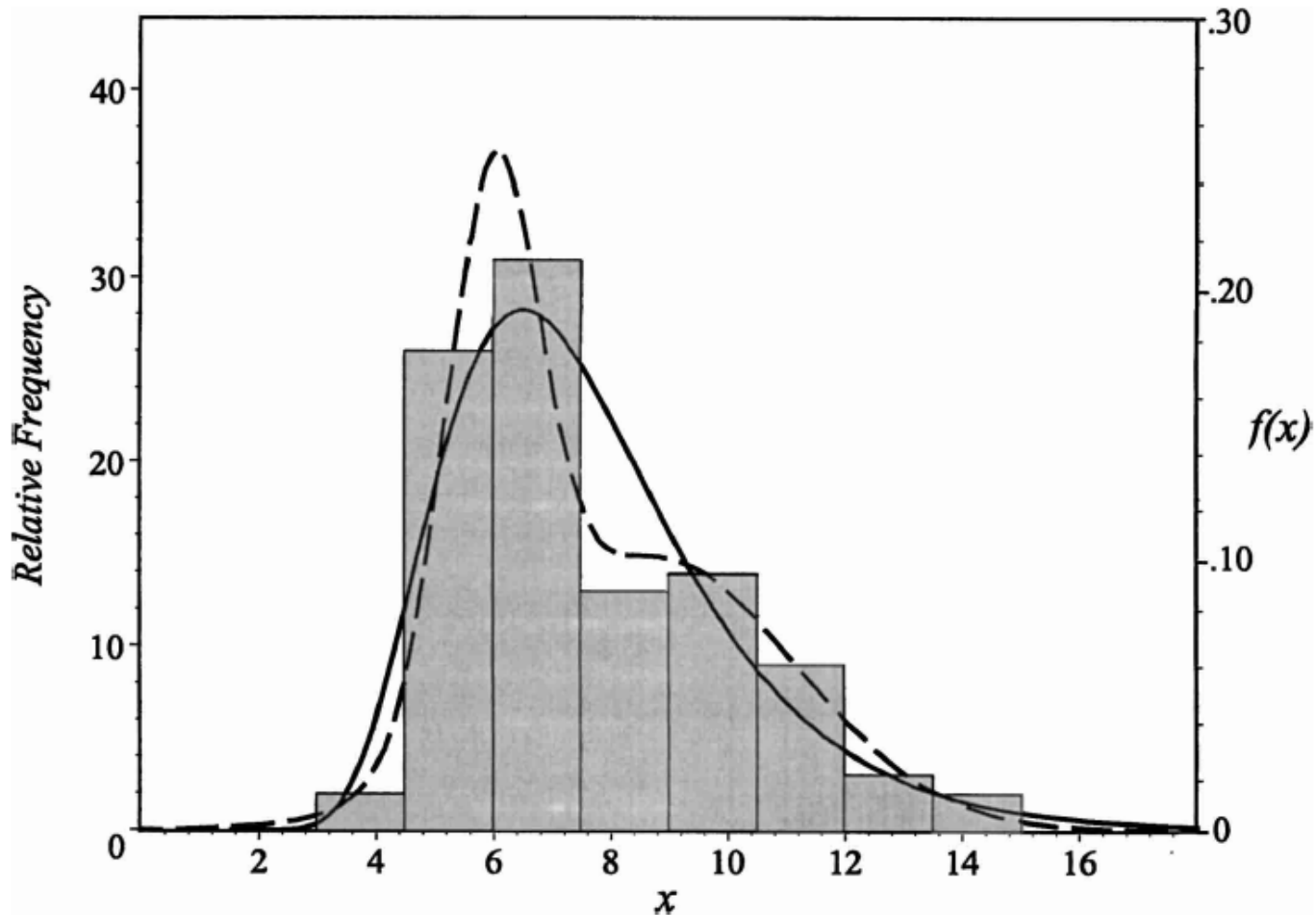
最初の痛みがやや強くその後の変化も大きいクラス

最初の痛みが強くその後の変化も二次的で大きいクラス

# クラスタ・クラス数の推定・決定

- 各クラスに所属する個人の特徴を外的な説明変数を用いて分析することも可能（e.g., 名義ロジスティック分析, ここでは省略）。
  - 抽出されたクラスを実在的なものと捉えるか、データを近似する数理的な産物と捉えるか（Bauer & Curran, 2003,2004）。データを捉える一つの見方と考え、またクラス内のデータに個人差があることは留意すべき。
  - 潜在成長混合モデルの適用の際は、分析目的や先行研究の知見、データの性質を十分に踏まえながら、k-meansや混合モデルの結果も適宜参照し、また様々な構造化を試しながら比較するとよい。
- 分布仮定は適切か（床効果/天井効果による過剰抽出のリスク）。
- 抽出されたクラスが実質科学的見地からどのような価値を新たに付与するものなのか？





*Figure 3.* The sample histogram displays the relative frequency of values of variable  $x$  for 100 cases. Overlaid on the histogram are the probability distributions for a two-component normal mixture (dashed line) and a lognormal distribution (solid line). Both functions appear to fit the data well, but the population generating function was lognormal.

# 補足：決定木

宇佐美(2017)

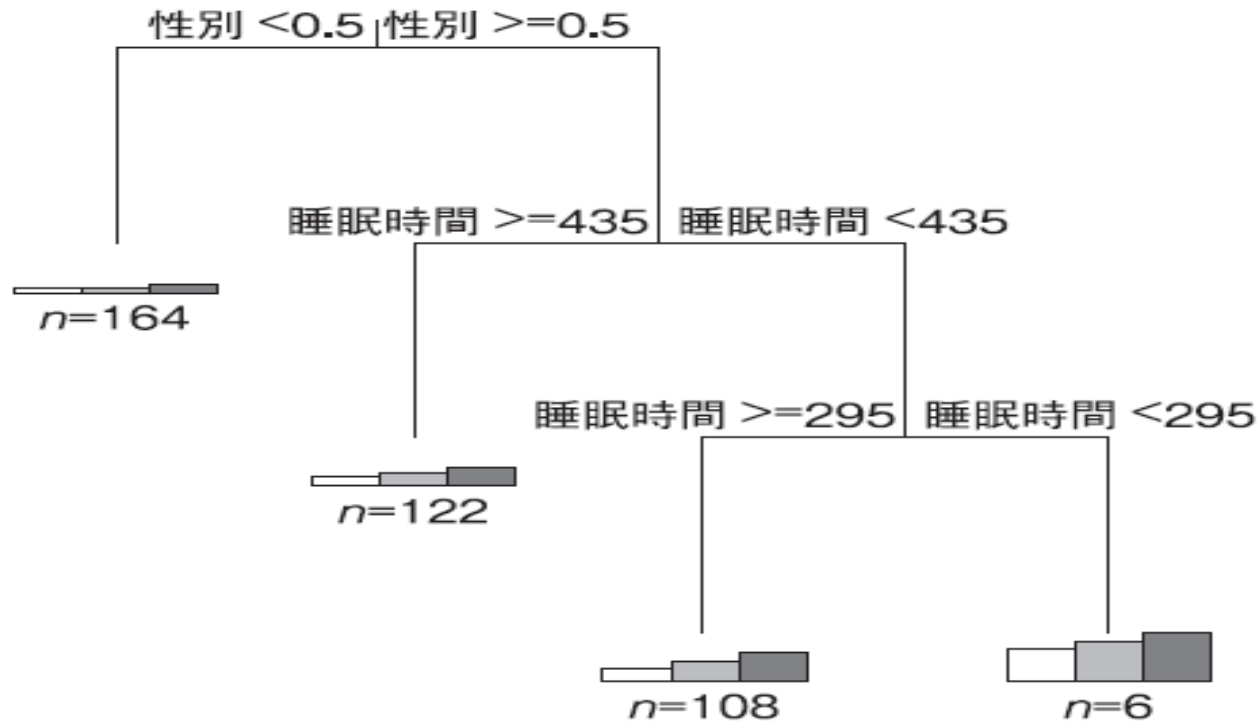


図 14-5 GHQ1-GHQ3 に基づく木の推定結果

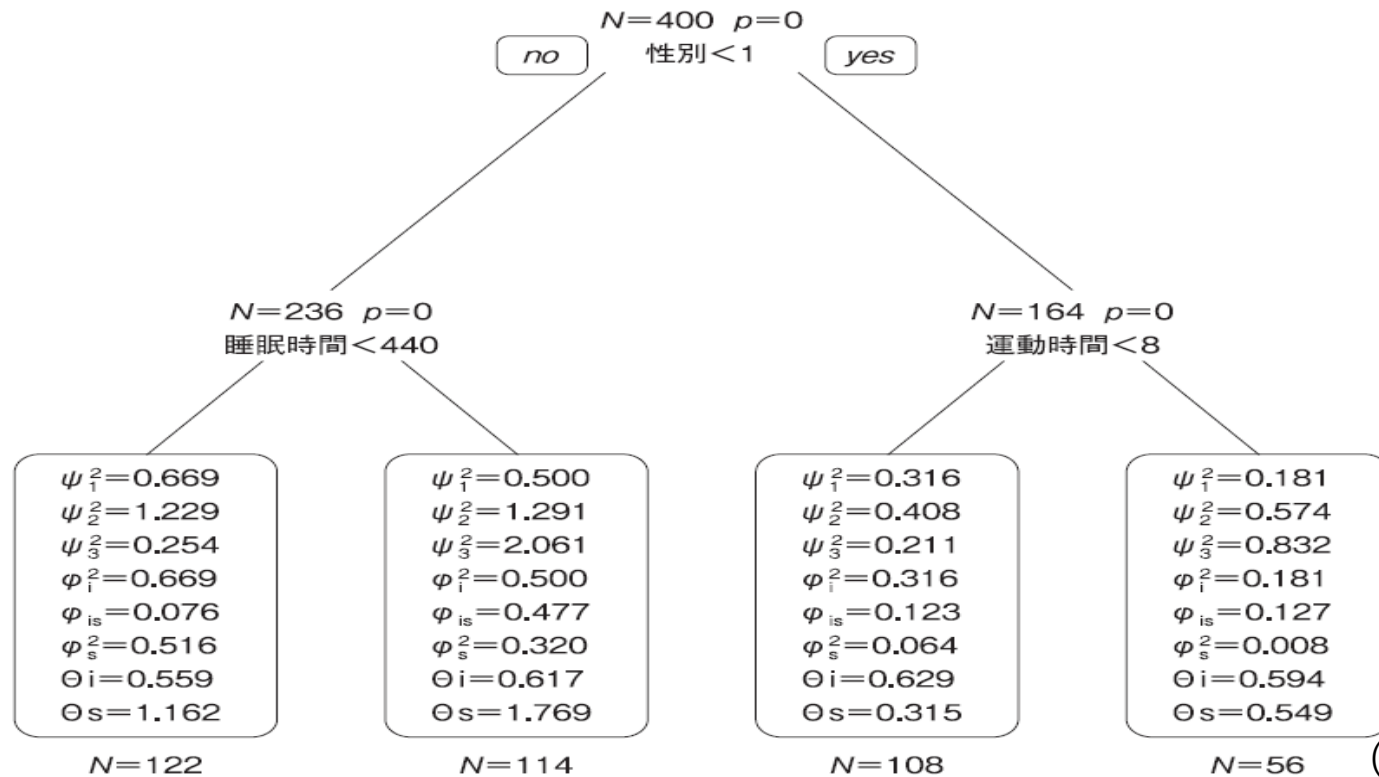
- ・ 基準関数をもとに木を伸ばす (=ノードを分岐する) か決定する。
- ・ Rではrpart関数やmvpарт関数が利用できる。

# 補足：決定木

- (多数の) 説明変数があるときに、結果変数(GHQ)の予測に最適な説明変数とその基準値を段階的に抽出し、説明変数がある一定以上か未満であることを基準に予測値を得て、同時に個人を分類する。
- 各説明変数と結果変数の値の関係性は**階段 (ステップ) 関数**で表現されている。
- 最適な基準としてまず性別 (男子=0, 女子=1)が選ばれ、それを基に生徒全体を分類。そして女子では睡眠時間を基準にその後さらに分割。女子で一日の睡眠時間が短い (435分未満) の生徒がGHQが高い。
- このように、ある説明変数 (睡眠時間) の予測力・説明力の大きさが、他の説明変数 (性別) における水準 (男子・女子) 間で異なること、すなわち説明変数間の**交互作用**の存在を意味する。

# 変化の分類（構造方程式モデル決定木:semtree）

- Brandmaier et al. (2013,2014,2016)によって心理学から提案されたモデルベースの決定木。
- データの関係性を説明するモデル（例えばLGM）を設定し、モデル内の母数の差異を説明する最適な説明変数を抽出して木を生成する。



(宇佐美, 2017)

性別・睡眠時間・運動時間によってGHQの推移が異なることを示した決定木

# 変化の分類（構造方程式モデル決定木:semtree）

- Rではsemtreeが利用でき、Mplusでも実行可能(Serang et al., 2022)。

ダウンロード：<http://brandmaier.de/semtree/>

- （海外では比較的よく引用されているが）国内ではこれからの応用が期待されるところ。特に、LGM+決定木としてのsemtreeは、説明変数ベースで変化の集団差を記述するのに役立つ。
- ただし、変化の形状について誤ったLGMをあてはめれば実際とはかなり逸脱した分類構造を示す木が抽出されるリスクがある(e.g., Usami et al., 2017)。

# アウトライン

- 導入
- 潜在成長モデルによる変化の軌跡のモデリング
- 交差遅延モデル群による変数間の相互関係の推測
- 強縦断データと動学的SEM
- 軌跡の分類と潜在成長混合モデリング
- 欠測データの処理

# 欠測が生じる理由

- 1, 回答の選択枝に「わからない」が含まれているなど、回答形式による理由。
- 2, 一定の年齢以上でないと答えられないなど回答上の制約がある場合。たとえば、「何歳から喫煙していますか？」という質問への回答。
- 3, (回答者や調査者の) データの記入漏れや、データの紛失などの人為的ミス。
- 4, 回答者側の原因としての、調査・実験等への飽きや抵抗などの理由から生じる回答拒否（たとえば、年収についての質問は回答が拒否する場合がある）。
- 5, 回答者の転居や死亡など、調査・実験等への参加の継続不能による**脱落**。
- 6, データの打ち切り（観測値がある値以上とわかるものの実際の値は得られない場合）など、データの測定方法の制約から生じる理由。

# 基本方針

- まずは欠測メカニズム（MCAR, MAR, MNAR; Rubin, 1976）の検討から。
- リストワイズ・ペアワイズ削除は基本的に推奨されない。
- （今回の睡眠データのように）MARと考えられるのならば、完全情報最尤推定法(FIML)や多重代入法(MI)の利用が有効。
- データの正規性や線形的関係が仮定される状況では、これらはほぼ同じ結果を示すことが知られている（Lee & Shi, 2021）。SEMを用いている場合、MARであればFIMLを使えばよい（ソフトウェアでは標準実装）。
- MIについてはRでは Fully Conditional Specification (FCS) に基づく miceパッケージが利用可能。様々なモデルに対して汎用的に利用可能。
- MNARに基づく方法も幾つかあるが、絶対的に優れた方法はなく、様々な方法による結果を比較する感度分析として用いることが推奨されている（e.g., Newsom, 2016; Enders, 2023）。



# Use of missing data methods in longitudinal studies: the persistence of bad practices in developmental psychology

Helena Jeličić<sup>1</sup>, Erin Phelps, Richard M Lerner

Affiliations + expand

PMID: 19586189 DOI: [10.1037/a0015665](https://doi.org/10.1037/a0015665)

Jeličić, H., Phelps, E., & Lerner, R. M. (2009). Use of missing data methods in longitudinal studies: The persistence of bad practices in developmental psychology. *Developmental Psychology, 45*, 1195–1199. doi:10.1037/a0015665

## Abstract

Developmental science rests on describing, explaining, and optimizing intraindividual changes and, hence, empirically requires longitudinal research. Problems of missing data arise in most longitudinal studies, thus creating challenges for interpreting the substance and structure of intraindividual change. Using a sample of reports of longitudinal studies obtained from three flagship developmental journals—Child Development, Developmental Psychology, and Journal of Research on Adolescence—we examined the number of longitudinal studies reporting missing data and the missing data techniques used. Of the 100 longitudinal studies sampled, 57 either reported having missing data or had discrepancies in sample sizes reported for different analyses. The majority of these studies (82%) used missing data techniques that are statistically problematic (either listwise deletion or pairwise deletion) and not among the methods recommended by statisticians (i.e., the direct maximum likelihood method and the multiple imputation method). Implications of these results for developmental theory and application, and the need for understanding the consequences of using statistically inappropriate missing data techniques with actual longitudinal data sets, are discussed.

	完全ランダム欠測 (MCAR)	ランダム欠測 (MAR)	非ランダム欠測 (MNAR)
定義と特徴	いずれのデータも欠測とは無関係であり、各個人のあいだでデータの欠測確率が等しい。	観測したデータが欠測に依存する。そのため、データの欠測の有無を、観測したデータを手がかりにして推測できる。	欠測したデータそのものが欠測に依存する。そのため、データの欠測の有無を、欠測したデータを手がかりにして推測できる。(しかし、実際に欠測しているデータは見られないのでわからない)。
該当例	<ul style="list-style-type: none"> <li>データの記入もれ</li> <li>データの入力ミス</li> <li>回答者の転居</li> <li>測定内容と関係ない、回答者の病欠</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>縦断的な社会調査における高齢の回答者の死亡</li> <li>2次試験に進めない受験者の回答データの欠測(1次試験の得点の低さが欠測情報をもっている)。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>打ち切りによって正確な重さを体重計から知ることができない場合</li> <li>身体能力の低下により足腰が弱くなって検査会場に来られず、身体能力の検査データに欠測がおきた場合(身体能力の低さが欠測に依存)</li> </ul>
望ましい分析法	<ul style="list-style-type: none"> <li>多重代入法</li> <li>完全情報最尤推定法</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>多重代入法</li> <li>完全情報最尤推定法</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>選択モデル</li> <li>パターン混合モデル</li> </ul>

Mは欠測を表すインディケーター変数

$$p(M|Y) = p(M) \quad p(M|Y) = p(M|Y^{obs}) \quad p(M|Y) \neq p(M|Y^{obs})$$

# 完全情報最尤推定法(FIML)

- FIMLではデータを補完するのではなく、各個人に対して観測されたデータのみを用いて尤度を構成して母数を最尤推定する。
- 個人 $i$ について観測されている $P_i$ 個のみの観測変数を取り出したベクトルを $\mathbf{y}_{i(obs)}$ 、個人 $i$ の観測データに対応した要素のみを含むモデルの平均構造と共分散構造をそれぞれ $\boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta})$ および $\boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\theta})$ とすると、FIMLでは以下の尤度関数を最大化する。

$$L_N(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N (2\pi)^{-\frac{P_i}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\theta})|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_{i(obs)} - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta}))^\top \boldsymbol{\Sigma}_i(\boldsymbol{\theta})^{-1} (\mathbf{y}_{i(obs)} - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta})) \right]$$

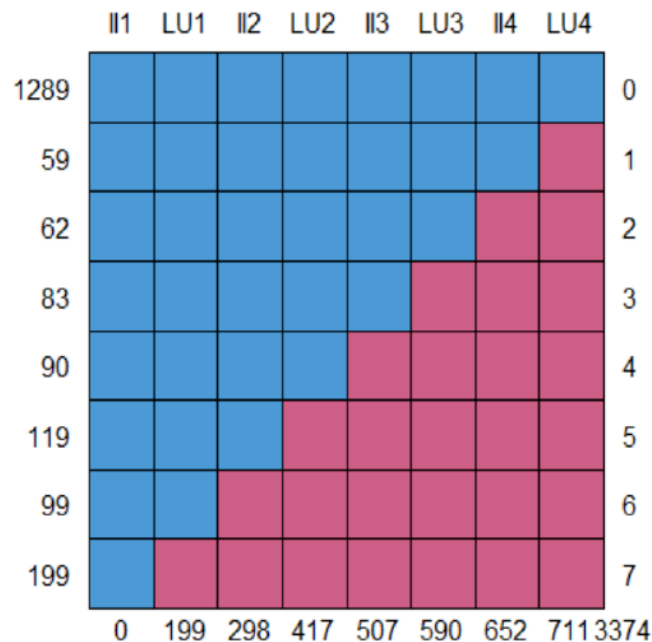
- FIMLでは観測されている変数の数が多い、すなわち、母数を推定する上で多くの情報をもつ個人であるほど、尤度関数に大きな影響を与える。
- MARの下では、変数間が線形的な関係であれば、分布が非正規でもFIMLに基づく最尤推定量は一致性をもつことが知られている。

# 分析例(MARによる欠測&脱落を仮定)

ID	$II_1$	$LU_1$	$II_2$	$LU_2$	$II_3$	$LU_3$	$II_4$	$LU_4$
1	9	5	13	11	15	15	15	14
2	12	8	14	13	20	18	23	21
3	9	6	9	3	10	10	12	9
4	6	8	7	5	10	13	12	19
5	4	6	8	9	15	8	19	8
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2000	13	12	19	12	28	16	31	17

II: 幼児知能  
LU: 言語理解

ID	$II_1$	$LU_1$	$II_2$	$LU_2$	$II_3$	$LU_3$	$II_4$	$LU_4$
1	9	5	13	11	15	15	15	14
2	12	8	14	13	20	18	NA	NA
3	9	6	9	3	10	10	12	9
4	6	8	7	5	10	13	12	19
5	4	6	8	9	15	NA	NA	NA
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2000	13	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA



# 分析例(多変量LGMをあてはめた場合)

	完全データ	MI	FIML	リストワイズ
$\chi^2$	18.314	23.323	25.116	26.812
$p$	0.687	0.384	0.292	0.218
CFI	1	1	0.999	0.999
RMSEA	0	0.005	0.008	0.013
	[0.000, 0.015]	[0.000,0.020]	[0.000, 0.021]	[0.000, 0.028]
SRMR	0.011	0.014	0.014	0.016
$\phi_{IxSx}$	0.555 (0.095)	0.598 (0.113)	0.595 (0.117)	0.531 (0.119)
$\phi_{IySy}$	0.616 (0.091)	0.626 (0.108)	0.652 (0.116)	0.446 (0.096)
$\phi_{IxIy}$	0.929 (0.107)	0.856 (0.124)	0.922 (0.122)	0.651 (0.115)
$\phi_{IxSy}$	0.196 (0.074)	0.116 (0.085)	0.126 (0.084)	0.013 (0.081)
$\phi_{SxIy}$	0.187 (0.076)	0.219 (0.092)	0.213 (0.102)	0.106 (0.085)
$\phi_{SxSy}$	0.446 (0.055)	0.481 (0.064)	0.483 (0.068)	0.368 (0.061)
$\mu_{Ix}$	6.981 (0.049)	6.941 (0.057)	6.961 (0.053)	6.757 (0.060)
$\mu_{Sx}$	2.058 (0.036)	2.090 (0.043)	2.087 (0.045)	1.957 (0.044)
$\mu_{Iy}$	9.952 (0.048)	9.974 (0.057)	9.973 (0.049)	9.318 (0.053)
$\mu_{Sy}$	2.018 (0.034)	1.983 (0.039)	1.987 (0.040)	1.741 (0.038)
$\phi_{Ix}^2$	1.810 (0.187)	1.572 (0.218)	1.658 (0.213)	1.546 (0.229)
$\phi_{Sx}^2$	1.700 (0.089)	1.710 (0.107)	1.714 (0.110)	1.664 (0.111)
$\phi_{Iy}^2$	1.684 (0.184)	1.663 (0.220)	1.667 (0.222)	0.907 (0.193)
$\phi_{Sy}^2$	1.489 (0.082)	1.349 (0.094)	1.319 (0.097)	0.991 (0.083)

\*リストワイズでは、特にy（言語理解）を中心に、軌跡の平均や分散に大きなバイアスが生じる。

\*MIとFIMLは概ね同じ。

# MNARに基づく方法：選択モデル

$$f(M, Y) = p(M|Y)f(Y)$$

因子依存

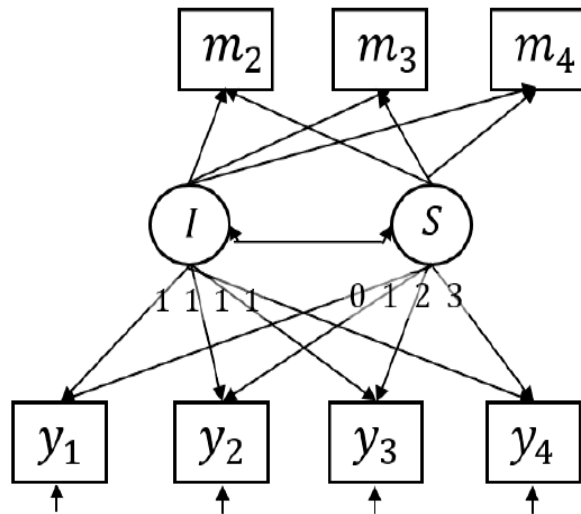


図70 LGMにおける選択モデル (Wu-Carroll Parameter-Dependent Approach; cf Newsom, 2015)

指標依存

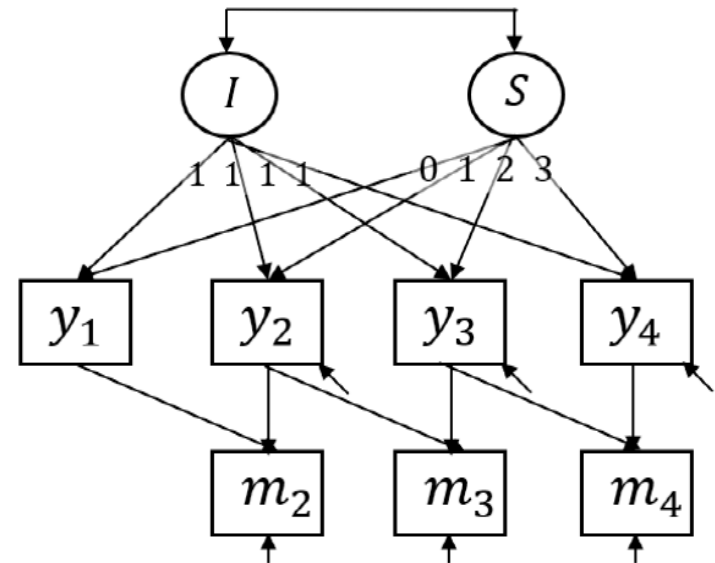


図71 LGMにおける選択モデル (Diggle-Kenward Approach; cf Newsom, 2015)

推測に関心のある変数 $Y$ に関する分析モデル（理論モデル; substantive model;  $f(Y)$ ）と欠測の有無 $M$ を予測する欠測モデル $p(M|Y)$ を組み合わせたもの。

# 分析例(NMARによる欠測&脱落を仮定)

表 75 欠測のあるデータ 2 ( $T = 4$ )

ID	$II_1$	$II_2$	$II_3$	$II_4$	$m_2$	$m_3$	$m_4$
1	9	13	15	15	0	0	0
2	12	14	20	23	0	0	0
3	9	9	10	12	0	0	0
4	6	7	10	12	0	0	0
5	4	8	15	19	0	0	0
6	14	NA	NA	NA	1	1	1
7	8	10	9	10	0	0	0
8	9	10	12	NA	0	0	1
9	7	11	NA	NA	0	1	1
10	12	12	16	20	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...
2000	13	NA	NA	NA	1	1	1

# 分析例(LGMをあてはめた場合)

	完全データ	MI	FIML	リストワイズ	選択 (因子)	選択 (指標)
$\chi^2$	4.289	4.735	3.963	5.859	-	-
$p$	0.509	0.449	0.555	0.320	-	-
CFI	1.000	1.000	1.000	1.000	-	-
RMSEA	0.000	0.000	0.000	0.011	-	-
	[0.000, 0.029]	[0.000, 0.030]	[0.000, 0.032]	[0.000, 0.039]	-	-
SRMR	0.010	0.014	0.014	0.015	-	-
$\phi_{IS}$	0.609(0.092)	0.513(0.098)	0.512(0.102)	0.453(0.101)	0.590(0.091)	0.576(0.106)
$\mu_{Ix}$	9.952(0.048)	9.930(0.052)	9.936(0.049)	9.675(0.055)	9.931(0.049)	9.944(0.053)
$\mu_{Sx}$	2.018(0.034)	1.877(0.036)	1.873(0.036)	1.809(0.037)	1.994(0.051)	1.995(0.065)
$\phi_{Ix}^2$	1.691(0.184)	1.523(0.199)	1.563(0.199)	1.408(0.206)	1.557(0.157)	1.609(0.198)
$\phi_{Sx}^2$	1.498(0.083)	1.278(0.084)	1.258(0.088)	1.209(0.087)	1.364(0.084)	1.373(0.104)
$\psi_1^2$	4.162(0.213)	4.341(0.238)	4.304(0.231)	4.330(0.250)	4.309(0.198)	4.254(0.226)
$\psi_2^2$	4.183(0.159)	4.077(0.172)	4.096(0.173)	4.029(0.179)	3.991(0.165)	4.042(0.175)
$\psi_3^2$	4.214(0.198)	4.051(0.208)	4.109(0.219)	4.036(0.218)	4.046(0.225)	4.183(0.263)
$\psi_4^2$	3.962(0.329)	4.041(0.349)	4.026(0.367)	4.125(0.367)	4.153(0.362)	3.968(0.396)

- ・リストワイズ法はバイアスが大きい。
- ・MI やFIML においても因子平均・因子分散の推定値が小さい。
- ・このデータでは、因子依存か指標依存かといった選択モデルの設定の違いに強く依存せず、概ね同様の推定結果を示している。



- 欠測の理由やメカニズム、そして欠測データを扱う各方法の手続きや仮定を吟味しながら最適な方法を選択していくことが重要。
- より良いデータ収集の工夫を考えることも必要（欠測を誘発しない質問の立て方や、予備調査の段階で欠測の有無を説明できそうな変数を特定し収集するなど）。
- MAR が成立しているかについて確証を得るのは難しい。 その意味で、MNAR を仮定した分析を感度分析として実行することは重要。
- 現在では選択モデルやパターン混合モデルの実装は多くのソフトウェアで実行可能であるが（e.g., Mplus）、これらの利用は未だ限定的（Enders, 2023）。
- 感度分析の結果がある程度共通した分析結果を示すのであれば欠測の取り扱い如何が結果に与える影響は小さいものと結論づけられる。もし結果が異なるのであれば、判断され得る結論の範囲を示すことなどが求められる。

# 引用文献

- Andersen, H.K. (2021). Equivalent approaches to dealing with unobserved heterogeneity in cross-lagged panel models? Investigating the benefits and drawbacks of the latent curve model with structured residuals and the random intercept cross-lagged panel model. *Psychological Methods*, 27 (5), 730–751.
- Asendorpf, J. B. (2021). Modeling developmental processes. In J.R. Rauthmann (Ed.), *The handbook of personality dynamics and processes* (pp. 815–835). Elsevier Academic Press.
- Asparouhov, T., Hamaker, E. L., & Muthén, B. (2018). Dynamic structural equation models. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 25, 359-388. doi: 10.1080/10705511.2017.1406803
- Baltes, P.B. and Nesselroade, J.R. (1979). History and rationale of longitudinal research. In J.R.Nesselroade and P. B. Baltes (eds.) *Longitudinal Research in the Study of Behavior and Development* (pp. 1-39). New York: Academic.
- Bauer, D.J., & Curran, P.J. (2003). Distributional assumptions of growth mixture models: Implications for overextraction of latent trajectory classes. *Psychological Methods*, 8, 338-363.
- Bauer, D.J., & Curran, P.J. (2004). The integration of continuous and discrete latent variable models: Potential problems and promising opportunities. *Psychological Methods*, 9, 3-29.
- Bollen, K. A. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York: Wiley.
- Bollen, K.A., & Curran, P.J. (2006). *Latent curve models: A structural equation approach*. Hoboken, NJ: Wiley.
- Brandmaier, A.M., Oertzen, T.v., McArdle, J.J., Lindenberger, U. (2013). Structural equation model trees. *Psychological Methods*, 18:71–86. <https://doi.org/10.1037/a0030001>
- Brandmaier, A.M., Oertzen, T.v., McArdle, J.J., Lindenberger, U. (2014). Exploratory data mining with structural equation model trees. In: McArdle JJ, Ritschard G (eds) *Contemporary issues in exploratory data mining in the behavioral sciences*. Routledge, New York, pp 96–127

# 引用文献

- Brandmaier, A.M., Prindle, J.J., McArdle, J.J., Lindenberger, U. (2016). Theory-guided exploration with structural equation model forests. *Psychological Methods*, 21, 566–582.
- Calinski, R. B., & Harabasz, J. (1974). A dendrite method for cluster analysis. *Communications in Statistics*, 3, 1–27.
- Curran, P.J. (2003). Have multilevel models been structural equation models all along? *Multivariate Behavioral Research*, 38, 529-569.
- Enders, C.K. (2023). Missing data: An update on the state of the art. *Psychological Methods*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1037/met0000563>
- Grimm, K.J., Ram, N., & Estabrook, R. (2016). *Growth modeling: Structural equation and multilevel modeling approaches*. New York: Guilford Press.
- Hamaker, E.L., Kuiper, R.M., Grasman, R.P.P.P., (2015). A critique of the cross-lagged panel model. *Psychological Methods*, 20, 102–116. <https://doi.org/10.1037/a0038889>.
- Hamaker, E.L., Mulder, J.D., & van IJzendoorn, M.H. (2020). Description, prediction and causation: Methodological challenges of studying child and adolescent development, *Developmental Cognitive Neuroscience*, 46, 100867, ISSN 1878-9293, <https://doi.org/10.1016/j.dcn.2020.100867>.
- Hamaker, E.L. (2023). The within-between dispute in cross-lagged panel research and how to move forward. *Psychological Methods*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1037/met0000600>
- Kline, R.B. (2016). *Principles and practice of structural equation modeling (4th ed.)*. Guilford Press.
- Lee, T., & Shi, D. (2021). A comparison of full information maximum likelihood and multiple imputation in structural equation modeling with missing data. *Psychological Methods*, 26 (4), 466–485.
- Matamura, M., Tochigi, M., Usami, S., Yonehara, H., Fukushima, M., Nishida, A., Togo, F., & Sasaki, T. (2014). Associations between sleep habits and mental health status and suicidality in the longitudinal survey of monozygotic-twin adolescents. *Journal of Sleep Research*, 23, 290-294.

# 引用文献

- McNeish, D., & Matta, T. (2018). Differentiating between mixed-effects and latent-curve approaches to growth modeling. *Behavior Research methods*, 50 (4), 1398–1414.
- McNeish, D., & Hamaker, E.L. (2020). A primer on two-level dynamic structural equation models for intensive longitudinal data in Mplus. *Psychological Methods*, 25 (5), 610–635.
- McNeish, D., Harring, J. R., & Bauer, D. J. (2023). Nonconvergence, covariance constraints, and class enumeration in growth mixture models. *Psychological Methods*, 28 (4), 962–992.
- Meredith, W., & Tisak, J. (1984). On “Tuckerizing” curves. Presented at the annual meeting of the psychometric society.
- Meredith, W., & Tisak, J. (1990). Latent curve analysis. *Psychometrika*, 55, 107–122.  
<https://doi.org/10.1007/BF02294746>
- Merkle, E. C. & Rosseel, Y. (2018). blavaan: Bayesian structural equation models via parameter expansion. *Journal of Statistical Software*, 85, 1-30.
- Mulder, J.D., & Hamaker, E.L. (2021). Three extensions of the random intercept cross-lagged panel model. *Structural Equation Modeling*, 28(4), 638–648.
- Newsom, J.T. (2015). *Longitudinal Structural Equation Modeling: A Comprehensive Introduction*. New York: Routledge
- Orth, U.D., Clark, A.M., Donnellan, B., & Robins, R. W. (2021). Testing prospective effects in longitudinal research: Comparing seven competing cross-lagged models. *Journal of Personality and Social Psychology*. <http://dx.doi.org/10.1037/pspp0000358>
- Rosseel, Y. (2012). lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. *Journal of Statistical Software*, 48, 1-36. URL <http://www.jstatsoft.org/v48/i02/>.
- Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometrika*, 63, 581–592.

# 引用文献

- Schuurman, N.K., Ferrer, E., de Boer-Sonnenschein, M., & Hamaker, E.L. (2016). How to compare cross-lagged associations in a multilevel autoregressive model. *Psychological Methods*, 21, 206-221.
- Serang, S., Jacobucci, R., Stegmann, G., Brandmaier, A.M., Cuiyanos, D., & Grimm, K.J. (2021). Mplus Trees: Structural Equation Model Trees Using Mplus. *Structural Equation Modeling*, 28, 127-137.
- Usami, S. (2014). Performances of information criteria for model selection in a latent growth curve mixture model. *Journal of the Japanese Society of Computational Statistics*. 27, 17-48.
- Usami, S. (2023). Within-person variability score-based causal inference: A two-step estimation for joint effects of time-varying treatments. *Psychometrika*, 88, 1466-1494.
- Usami, S., Hayes, T., & McArdle, J.J. (2017). Fitting structural equation model trees and latent growth curve mixture models in longitudinal designs: The influence of model misspecification in estimating the number of classes. *Structural Equation Modeling*. 24, 585-598.
- Usami, S., Murayama, K., & Hamaker, E.L. (2019). A unified framework of longitudinal models to examine reciprocal relations. *Psychological Methods*, 24, 637-657
- Usami, S., Todo, N., & Murayama, K. (2019). Modeling reciprocal effects in medical research: Critical discussion on the current practices and potential alternative models. *PLOS ONE*. 14(9): e0209133.
- 豊田秀樹 (1998). 共分散構造分析入門編 朝倉書店
- 豊田秀樹編 (2014). 共分散構造分析R編 東京図書
- 宇佐美慧・荘島宏二郎 (2015). 発達心理学のための統計学—縦断データの分析— 誠信書房
- 宇佐美慧 (2017). 縦断データの分類—決定木および構造方程式モデリング決定木. 荘島宏二郎 (編) パーソナリティ計量心理学 第14章
- 宇佐美慧 (2022). 個人内関係の推測と統計モデル—ランダム切片交差遅延パネルモデルを巡って— 発達心理学研究, 33, 267-286.